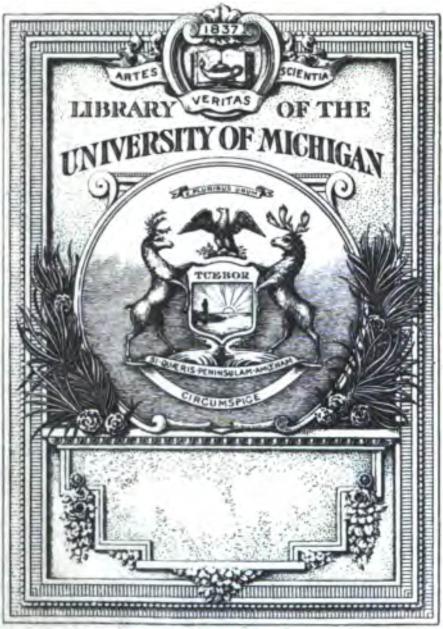

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

JOH. CHRISTOPH. STURMII
P. P.

MATHESIS ENUCLEATA,

Cujus

Præcipua Contenta

Sub finem Præfationis, uno quasi obtutu spectanda, exhibentur.

Excusa Norimbergæ;

Typis & Impensis WOLFGANGI MAURITII ENDTERI.

ANNO M DC LXXXIX.

SERENISSIMO AC POTENTISSIMO

PRINCIPI AC DOMINO

DOMINO

FRIDERICO TERTIO

MARGRAVIO BRANDENBURGICO, S.R.I. ARCHICAMERARIO ET ELECTORI,

Prussiæ, Magdeburgi, Juliaci, Cliviæ, Montium, Stetini, Pomeranorum, Cassubiorum, Vandalorum, in Silesia Crosnæ & Swibusi

DUCI.

Burggravio Norimbergensi, Principi Halberstadii, Mindæ & Camini, Comiti in Hohenzollern, Marcæ & Ravenspergi, Domino in Ravenstein Lavenburg & Butau &c. &c. &c.

DOMINO MEO CLEMENTISSIMO.

INtempestivus omnino multis fortè videbitur hic Mathematum nostrorum ausus, quo Tanti Principis arduis maximè Consiliis obstrepere, continuatisque pro communis Patriæ salute cogitatis providentissimis intercedere non erubescunt, eo præsertim tempore, quo scribendo undique militi, cogendis exercitibus, stringendis in hostes ensibus, vibrandis hastis, ejaculandis tormentorum fulminibus, servandæ Germaniæ, defendendis oppressis, castigando denique hostium injustissimo furori, unicè intentus est animus Paternæ Fortitudinis hæres & æmulator flagrantissimus. Silere inter arma uti solent Leges, ita fortè deceret Musas; ut quarum placidus humanusque vultus ad compescendam hostis immanis ferociam ineptus est penitus; nec op-

portunum in manus Heroum libros dare hoc rerum ſtatu, qui loco Caducei Mercurialis clavas Herculeas, & Martiales rhomphæas depoſcit. Novum aliquod inventum pyrobolicum pandere, quo aut majore efficaciâ, aut ſumtu minore, ſtrages hoſtium ingentes edere liceret, id verò gratum ac tempori accommodum eſſet futurum: nova verô Matheſeos ſpeculatricis methodus, aut via demonſtrandi compendioſior, parum faciet ad rem præſentem, nihil ad hoſtium inſultus reprimendos. At enim verò, hæc ita quidem non ſine cauſa nobis objicerentur, ſi Heroum animi non eſſent niſi unarum curarum eodem tempore capaces; ſi bonarum literarum omnem ſtatim abjicerent curam, dum meditari bella, dum contra furorem exterum non ſuas tantùm ſed vicinorum, quoque confœderatorumque terras defendere occipiunt. Id verò tantum abeſt, ut cadere in animos tam gran-

des & Generosos possit, ut, probè gnari, non optima quæque alia tantùm, sed literarum studia imprimis, languere vigente sævienteque bello, hoc potiùs omni cura, multoque magis quàm aliàs unquam agunt, ut languentes corroborent scientias, & succubituras vel ipso gladio suffulciant. Nimirum, ut illati belli sævitia cum pacis commoditatibus cæteris florentium quoque literarum decus proterit & conculcat; sic animosa justæ defensionis arma vitam ipsis dubiam conservant, periclitantemque salutem restituunt: ut non alio magis quàm belli tempore ad bellatricia Defensorum tribunalia confugere necessum habeant. Neque verò nullam prorsus ad bellicorum etiam consiliorum felices eventus symbolam conferunt bonæ literæ, & alma Mathesis imprimis, amplissimo suorum pomœriorum ambitu Architecturam Militarem, Artem Pyrobolicam, Tacticam, sive ordinandorum

exercituum turmarumque, & Castro-
rum metandorum Notitiam, aliasque
disciplinas complectitur, sine quibus
bella gerere, hoc ævo saltem, vanum
esset ac temerarium: ut, quod Palla-
dem armatam jam olim finxit sapiens
Antiquitas, id in divina Mathesi vel
maximè verum probatumque spectent
moderna tempora. Non erit igitur,
ut vereatur ampliùs in Conspectum
Tuum Serenissimum, ELECTOR
POTENTISSIME, venire Ma-
thesis nostra enucleata, quæ, tametsi
bellicas illas artes immediatè nondum
contineat, fundamenta tamen, istis
compendiosiore viâ ita substruit, ut
faciliùs deinceps feliciùsque suos mul-
tiplicaturæ fructûs haut vanâ spe vi-
deri queant. Nec deerant profectò
Viri Magni, qui tale quid ausuræ ani-
mos etiam adderent, & spem facerent
indubiam, non solùm repulsam ipsam
minimè laturam, sed, quæ est Gene-
rositas Animi tam sublimis & Cle-
men-

mentia ipsis perspectissima, gratiam etiam aliquam in oculis Tuis, sublimia quidem utplurimùm, aliquando tamen etiam humilia spectantibus, inventuram. Nimirum recordantur isti subinde, (quî enim oblivisci queant eorum, quæ toti terrarum orbi sunt notissima?) FRIDERICI GUILIELMI MAGNI, GENITORIS TUI, *HEROIS* INCOMPARABILIS, *virtutum* planè singularium pace belloque ubique fulgentissimarum, quæ *non* Bellatorem Ipsum tantùm fortissimum, Justitiæ Propugnatorem acerrimum, Invasorum alienorum finium Terrorem & flagellum, & propriæ, & communis Patriæ Patrem ac Defensorem felicissimum; sed Religionis quoque & Pietatis Statorem, Eruditionis veræ Nutritium, & Literatorum Mœcenatem Summum, Ipsum constanter extitisse innumeris documentis ubique demonstrârunt. Norunt isti TE, PRINCEPS SUMME, non

patriarum terrarum solùm ac dignitatis Electoralis, sed & paternarum Virtutum omnium ex asse hæredem; ideòque & oppressæ adeò nuper Germaniæ nostræ Protectorem TE nobis securè promittunt, & literarum studiis, vel ex media belli truculenti flammâ effulsuris, Promotorem Evergetamque pollicentur, imò jam ipso facto talem gratâ mente deprædicant. Quidni ergo hâc tantâ spe excitatus ego, homo quidem humiliore loco positus, bonarum literarum tamen & Matheseos imprimis cultor & excultor utinam tàm felix quàm solicitus, audeam nunc ad CLEMENTIÆ TUÆ thronum me provolvere, & levidensem hunc libellum, Matheseos, adeò commendatæ TIBI, provehendæ specimen, ad pedes Tuos humillimè deponere? Imò verò, non audeo solùm hoc facere, sed fretus Humanitate Tua decantatissimâ, homine tantò magis digna, quò magis ultra cætero-

terorum ſortem elevatus eſt, planè confido fore, id quod ea etiam quâ par eſt ſubjectione devotiſſimè rogo atque contendo, ut chartaceum hoc & pertenue humillimi obſequii documentum ſub conſpectum incomparabilis Clementiæ TUÆ humillimâ mente manuque devotiſſimâ delatum, Vultu ſereno reſpicias, dextrâque benigniſſimâ ſuſcipias, & me, fœtûs hujus, fortaſſe non usque adeò maturi parentem, inter Clientes Tuos numerare ne dedigneris. Ego ſanè, quod TANTI PRINCIPIS clientem decet, pro meâ virili quidem omnibus præſtare modis nunquam deſiſtam, quin id agam ſedulò, ut quantum in me eſt, Univerſi intelligant, quàm mirificè Exteri quoque innumerabiles affecti ſint erga Pietatem Tuam in Beatiſſimos Manes glorioſiſſimæ memoriæ Genitoris, (quem DOMINI quoque TUI titulo Dormitorio ſuo imponi, exemplo affectûs modeſtiæque

filialis, inter Tuæ Conditionis homines, quod ego ſciam, inaudito, voluisti; erga Prudentiam Tuam, & raram ingenii aciem, menſuram ætatis multis paraſangis excedentem, quam non uno facto ſub ipſa ſtatim Regiminis ſuſcepti primordia, admirantibus, qui eorum conſcii erant, omnibus, comprobaſti; erga Fortitudinem Tuam, cujus haut vulgaria ſpecimina jam antehac, præeunte Tibi adhuc MARTE BRANDEBURGICO (quem iterum nominare ſupervacuum eſſet) edidiſti, & quam nuper adeò in labaſcentis Libertatis Germanicæ defenſione cordatè ſuſcipienda, novo argumento confirmaſti; impoſterum verò, quod indefeſſæ & nocte dieque continuatæ, ad iſtam metam unicè collineantes curæ ſperare jubent, iis porrò documentis quamplurimis Univerſo Orbi ita demonſtrabis, ut per ipſa hoſtium ora circumvolatura fama Tua, & Paternæ Gloriæ veſtigia ubique preſſura,

ra,

ra, immortalitatis Laudem ultra ipsos mortalitatis terminos, (quos cùm deprecari penitus non detur, longissimè saltem ab hoc ævo remotos devotè exoptamus) proferre, vel si nolit, possit. DEUS interim TER OPTIMUS, TER MAXIMUS, servet Te ELECTOR POTENTISSIME in *Augustæ* Domûs Brandenburgicæ universæ grande decus & solatium, Tuamque sigillatim invidendam felicitatem, in subditorum Tuorum perpetuum emolumentum, in Germaniæ nostræ, communis Patriæ, salutem, in purioris denique Religionis, junctâ cum cæterorum Regum, Electoris, & Principum Septentrionaliorum Tuâ quoque operâ valentissimâ, conservandæ incrementa perpetua! Servet Serenissimam Conjugem Electricem, eamque porrò coelitus foecundet, ut prolem Tui similem Tibi pariat ex voto numerosam! Servet ex Te illâque

jam natum Principem hæredem, & illius quoque Serenissimam Familiam, in Nepotes & nunquam finiendam posteritatem olim ita proroget, ut ex Te natos Electores videre Mundus non desinat priùs, quàm eo ipso momento, quo ipsemet est desiturus existere! Servet TIBI (quam partem suæ felicitatis maximam sapiens quisq; Princeps reputat) Ministros & Consiliarios, quos habes magno numero, fideles, providos & cordatos, Tui primùm, deinde subditorum Tuorum sincerè amantissimos, & externarum technarum, blanditiarum, pollicitationum, corruptionumque osores strenuos, contemtores acerrimos! Servet denique illos ipsos fideles ac subditos Tuos, in obsequio nunquam vacillante, amore Tui non intermorituro, augescente indies, per sapientissima MAGNI FRIDERICI GUILIELMI consilia & instituta, à TE

ulterius etiam feliciſſimè promovenda, commerciorum facultatumque ipſorum abundantia, pro publico primùm, deinde privato cujusque bono! Faxit item miſericordiâ non minus quàm Juſtitiâ ſuperabundantiſſimum Numen, ut Tuo cæterorumque Libertatis Germanicæ Vindicum ductu, conſilio, & brachio fortiſſimo, pax alma *nobis* ocyus reſtituatur, atque ita tandem firmetur, ut, qui turbare illam, & infringere impoſterum iterum velint, non poſſint. Ita vive Princeps Potentiſſime! Ita floreat per TE, & augeſcat in horas Antiqua BRENNORUM gloria! Ita pergant vivere ſub alarum Tuarum umbrâ bonæ literæ, quarum non Tutor es tantùm & Patronus, ſed Cultor etiam extitiſti jamdudum ſtrenuiſſimus! Ita Matheſis optima porro ſe ſentiat oculis Tuis caram, & hæc Enucleata noſtra lætetur à tanti Ingenii Prin-

cipe

cipe se non repudiatam! Ita denique hujus Autori liceat arrogare sibi laudem.

SERENITATIS VESTRÆ
ELECTORALIS

Dabam è Muséo meo
Ipso die Solstitii hyberni cIↃ IↃC LXXXVIII.

Servi humillimi.

Joh. Christoph. Sturm,
Mathem. & Phys. P. P.

AUTOR
ad Lectores suos.

I.

UT rectiùs æstimare propositum nostrum Æquus Lector possit, & metam, ad quam collineamus, in conspectu penitus habeat, inevitabilis nobis imponitur necessitas, de methodo Mathematica, tum universali tum particularibus præcipuis, modestè quædam, at cordatè tamen, præmonendi. Quemadmodum enim immane-quàntum olim obstitit Philosophiæ Naturalis incrementis & progressibus superstitiosa illa antiquitatis, & speciatim Aristotelis, veneratio, quos ex adverso felicissimos ac uberrimos ubique nunc videt, ac læta quidem, præsens ætas, posteaquam ausa est suis quoque viribus aliquid tribuere, inventis addere, intentata periclitari, dubiis certiora, bonis meliora, rem nominibus, credulitati experientiam, substituere; salvis interim, quas erant meriti haut exiguas, Antecessorum laudibus: Ita dubium

est nullum, Divinam *etiam* Mathesin, *nisi jam ad culmen evectam ab* Euclide, Archimede, Apollonio, *cæterisque priscæ ætatis ingeniis acutissimis, fuisset creditum, plus ultra enixuram dudum fuisse, ac istos etiam limites longè superaturam, quos attigisse nunc ævi haut immeritò miramur.*

II.

Illud equidem in confesso manet ac notum omnibus, in humanis scientiis universis nullibi plus certitudinis ac evidentiæ, majoremve demonstrationum ἀνάγκην *& veritatum inventarum multitudinem reperiri, quàm in Mathematicis, & quæ ab* Euclide *demonstrata, ab* Archimede *inventa, ab* Apollonio *aliisq; tradita possidemus, indubia esse, ingeniosissima, prorsus admiranda. Verùm enimverò, quin eorum quàmplurima aut disponi ordinatiùs, aut proponi faciliùs, aut demonstrari directiùs & evidentiùs, aut dici breviùs tradique compendiosiùs, nunc saltem possint, posteaquam ab ipsis inventa traditaque magno labore sunt, non amplius veremur asserere, maximè cùm præeuntes in hoc judicio habeamus Mathematicos præsentis ævi celebratissimos.*

III.

Certum est, Euclidem *propositiones plurimas*

rimas demonstrâsse (E. g. Propp. 2, 3, 20, 30, Lib. I. 2, 5, 6, 10, 15, 28, 29. Lib. III. &c.) quarum veritas attentæ menti statim ex ipsis terminis patet, multò promptiùs certè ac evidentiùs quàm veritas axiomatis 13. Lib. I. quod sine demonstratione adjecta non ausi sunt admittere Interpretes. Et quamvis superfluæ illæ demonstrationes veritati ac certitudini nihil derogent, propositionum tamen numerum multiplicando præter necessitatem, & (quod hinc frequenter consequitur) ordinem rerum ex necessitate invertendo, tædium & confusionem utiq; pariunt.

IV.

Quàm nullus sit porrò rerum ordo ac dispositio in Elementis Euclideis, nemo non videt, nisi qui culpare quidquam, quod à veteribus dictum factumve fuit, nefas esse putet. Ut enim id prætereàm, quòd in Libro I. & subjecti diversa genera, & proprietatum de illis demonstratarum magna varietas promiscuè, citra ullum similitudinis aut convenientiæ respectum, tractentur; illud certè excusari satis nullo modo potest, quòd, cùm primus hic liber speciales quasdam magnitudinum affectiones deduxisset, in secundo ea tractentur, quæ universalia

 sunt

ſunt & quantitati cuivis communia; mox in tertio & quarto circuli, & huic vel inſcriptarum vel circumſcriptarum figurarum, proprietates quasdam contemplatus, in quinto ad rationum proportionumque doctrinam reverà univerſaliſſimam iterum delabatur, nec ita tamen univerſaliter pertractatam, ut non opus habuiſſet Lib. VII. *de numeris eadem ſeorſim ac denuò demonſtrare, quæ de quantis quibusvis unâ generaliſſimâ demonſtratione deduci potuiſſent.*

V.

Jam quod ipſam demonſtrandi methodum veteribus uſitatam attinet; eam quidem certitudinem concluſionum omnimodam ſolicitè reſpexiſſe in propatulo eſt, nec admiſiſſe quicquam inter demonſtrandum, quod non aut primum eſſet principium ſuâ luce radians (Axioma *ipſis dictum*) *aut fieri poſſe, nemine contradicturo, ſupponebatur* (Poſtulati *nomen ideò ferens*) *aut arbitraria rerum denominatio demonſtratione nullâ indigens* (Definitio *ſive terminorum explicatio,*) *aut denique in præcedentibus non eſſet jam antè certiſſimè demonſtratum: nemo tamen, credo, negabit, plus laudis adhuc merituram fuiſſe methodum hanc*

geometricam, si cum illa conclusionum certitudine conjungere quoque facilitatem, brevitatem & evidentiam studuisset, quæ in plerisq; demonstrationibus veterum haut immeritò desiderantur; ut qui satis habebant, veritatem alicujus Theorematis egregii certissimè ac infallibiliter firmatam dedisse; quacunque id circuitione, per alias propositiones quamplurimas, ac tantùm non per integros libros, præstitissent, parum soliciti, & intellectûs assensum extorsisse contenti, ut rem sic esse cogeretur agnoscere, tametsi, cur ita esset, aut quâ subjecti naturâ vel conditione intrinsecâ postulante hoc vel istud attributum ipsi competeret, in obscuro maneret & ignotissimum.

VI.

Hinc adeò frequentes & familiares ipsis deductiones ad absurdum vel impossibile, quæ tamen adhiberi haut facilè debebant, nisi ubi demonstratio ostensiva haberi nulla potest, aut in propositionibus negativis illustrandis magis quàm demonstrandis; utpotè quæ ex aliis per se notis aut antè demonstratis ultrò ferè promanare solent. Nimirum Deductio ad impossibile *non tam verum ipsum directè, nedum ejus fontem, quàm consequentes oppositi suppo-*

 sitio-

ſitionem abſurditates demonſtrat; ex quibus valdè indirectè poſtea (tametſi certiſsimè) infertur, rem propoſitam debere eſſe veram, etiamſi ratio illius veritatis originaria prorſus lateat.

VII.

Quò majori jure faſtidienda nunc videatur methodus particularis *antiquiſsima, Euclidi quoque Lib. XII. Prop. 2, 10, aliisque uſitata, Archimedi verò quaſi propria, ideoque,* Archimedea *quibusdam,* Renaldino *verò* per exploſum exceſſum atque defectum *appellata. Præterquam enim, quòd geminatâ deductione ad abſurdum perpetuò nitatur, æqualitatem duarum e.g. magnitudinum, A & B per ambages extorquere laborat, oſtendendo, ſi B poneretur vel majus quàm A vel minus, ex utraque poſitione magnam ſequuturam eſſe abſurditatem; indeque porrò æqualitatis neceſſitatem illatione novâ quaſi emendicando; quæ ſi non ſuſpecta jure* Franciſco Vietæ *viſa eſt, citra limitationem hanc expreſſam ſaltem admitti non poteſt nec debet: Comparando ea, quorum natura æqualitatem non reſpuit, ſi alterum altero nec majus eſſe, nec minus, demon-*

ſtrari

strari queat, ipsorum æqualitatem rectissimè inferri.

VIII.

Visum autem jampridem est indubium Viris doctis, præter illam methodum Syntheticam, quâ celeberrima sua & utilissima theoremata ac Problemata vel ex principiis notioribus ostensivè ac directè deducebant, aut per deductiones ad absurdum confirmabant, usitatam[+] *veteribus fuisse viam quandam* analyticam, *cujus ope theoremata & problemata invenerint, & quam ipsi, ut eò major subiret alios inventorum admiratio, studiosè dissimulaverint ac suppresserint: quæ certè methodus priori præferenda multùm videtur, quòd non solùm certitudinem propositionum inventarum, sed ipsam earum inventionem unà complectatur; estque ea ipsa, quam* Vieta, Harriotus, Cartesius *eorumque sequaces hoc seculo non protraxêre solùm in apricum, sed miris etiam modis perfecerunt hodieque in dies magis perficiunt, & quam* Carolus Renaldinus *in vasto suo opere,* Ars Analytica Mathematum *inscripto, fusè persequitur.*

+ Licet v. in Scriptis Veterum nulla l. paucissima [illegible] vestigia reperiantur, impossibile tn. fuit, tot egregias invenire [illegible] Veritates, nisi artem inveniendi [illegible] [illegible]

IX.

Est verò & alia methodus particularis recentiùs exculta & à Bonaventura Cavallerio *inventa, quam* Indivisibilium methodum *appellant, inexplicabili facilitate ad difficillima theoremata demonstranda & abstrusissima Problemata solvenda conducens, quod est laudati modò* Renaldini *de ea judicium Lib. I. de Resol. & Comp. p. 239. Scilicet, in æqualitate aut proportione figurarum aut corporum ad invicem comparabilium demonstranda, incedit viâ omnium naturalissimâ, in planis figuris lineas innumerabiles, in solidis plana, (utrorumque indivisibilia dicta, quòd lineæ sine latitudine, plana sine profunditate concipiantur) simili positu fingens, ac de cætero axiomate hoc evidentissimo nixa, quòd, si unius magnitudinis indivisibilia, sive collectim omnia omnibus indivisibilibus correspondentibus alterius magnitudinis etiam simul sumptis, sive seorsim singula singulis, æqualia aut certo modo proportionalia clarè intelligantur, necessum sit etiam ipsas magnitudines æquales aut eodem modo proportionatas esse. Quæ quidem illatio fallaciæ aut erroris habere nihil potest, si modò rectè ac eo sensu accipia-*

cipiatur, quo eam accipi methodi hujus cultores voluerunt: id quod Renaldinus *Libro I. de Compos. & Resol. p. 245. in fine & p. 306. ab init.* Honoratus Fabry *in Synopsi Geometrica p. 24. seqq.* Barrovius *Lect. Geom. II. p. 21. sequ. satis ostendunt adversus* A. Tacquetum *& alios huic methodo infestos.*

X.

Affinis ipsi valdè est alia Methodus, Genitiva *fortè haut incongruè dicenda, quam Viri modò laudati,* Honoratus *in Synopsi,* & Barrovius *in Lect. Geom. studiosè excolunt, cujusque authorem* Guldinum *nobis laudat* Renaldinus *Lib. cit. p. 253. in fine, ipsius methodi regulas & fundamenta, secundùm conceptûs Guldini quidem, fusiùs exponens pagg. subseqq. Scilicet linearum ex certo puncti cujusdam motu sive fluxu exortus, superficierum planarum & curvarum, per lineæ cujusdam determinatam progressionem aut rotationem, generatio, corporum denique, per superficierum variarum varias motiones, quædam quasi productio, ita imaginando concipitur, ut magnitudinis quasi intrinseca natura inde cognoscatur, ejusque proprietates & affe-*

ctiones pleraeque ex natura sic cognita, viâ rectissimâ brevissimaque, deduci possint.

XI.

Magna porrò cognatio cum ista Cavalleriana intercedit I finitorum *sive* Progressionum methodo, *in qua, repertâ progressione certâ portionum quotcunque similium, toti cuidam magnitudini circumscriptarum vel inscriptarum, & per bisectionem continuam in infinitum multiplicabilium, tandemque in ipsam magnitudinem (vi doctrinae* Exhaustionum *Proposit. 1. Lib. X. Euclid. fundatae) necessariò recidentium, secundùm regulas addendarum ejusmodi progressionum, Summa terminorum istorum infinitorum, adeoque propositae magnitudinis quantitas aut ratio ad aliam datam magnitudinem definitur. Illa verò desinentia figurarum, e.g. circulo inscriptarum aut circumscriptarum infinitè, cùm non arrideret satis* Renaldino *(tametsi in* λογομαχίᾳ *quadam positus iste dissensus videatur) similem ipsi (quam peculiarem sibi ac propriam vocat) exponit methodum, duodecim theorematibus fundamentalibus innixam & exemplis pluribus deinceps illustratam, Lib. I. de Resol. & Composs. p. 277. & seqq.*

XII. No-

XII.

Novissimè quoque IS. NEWTON *Geometra ingeniosissimus*, Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica *subtiliter admodum demonstraturus*, *Lib. I. Sect. I. Lemmata quædam* de Methodo rationum primarum & ultimarum *præmisit, ut effugeret tædium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum. Cùm enim contractiores reddi demonstrationes agnovisset per methodum indivisibilium, nec ignoraret indivisibilium hypothesin duriorem, & propterea Methodum illam minus Geometricam censeri, maluit demonstrationes suas ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, i.e. ad limites summarum & rationum deducere, quibus idem præstetur quod per methodum indivisibilium, ac tutius interim uti liceat. Quæ quidem his ipsis ac pluribus aliis verbis inculcat Schol. Lemmatis XI. simul ad unam alteramque objectionem, quæ hanc etiam methodum remorari videbantur, explicatissimè respondens.*

XIII.

Frustrà verò essemus, si methodos hasce

pecu-

peculiares omnes ac singulas hoc quidem loco prolixiùs explicare constitueremus; quandoquidem propositum nobis est palmaria vera Matheseos theoremata & inventa sic demonstrata dare, ut nunc unâ nunc alterâ istarum, (firmis tamen fundamentis priùs stabilitarum) prout sc. aut hanc aut istam rei demonstrandæ accommodatiorem judicaverimus, usuri simus, atque adeò singularum vim & rationem ipso usu declaraturi. Et quamvis Honoratus in Synopsi p. 8. à Logistica speciosæ terminis abstinendum putet in demonstrationibus Geometricis, quòd tyronibus Algebrica *illa* methodus *paulò difficilior accidat; nobis tamen aliter omninò videtur (imò Virum ingeniosissimum eatenus saltem, quatenus nos fundamentis Algebricis non nisi simplicissimis passim in hoc opusculo usuri sumus, nobiscum sensurum, si hæc nostra videret, confidimus) eo præsertim casu, quo methodus hæc inter ipsas demonstrationes paulatim instillatur; & à primis usque principiis (quibus nihil facilius) ille computus literalis quasi aliud agendo docetur: id quod nos facturi sumus, eique adeò demonstrationum generi paulatim adsuefactos tyronum animos ad* Analysin Geometricam *recentiorem, universæ Matheseos culmen,*

præ-

præparaturi. Malumus autem Lectores nostros ipso facto deinceps cognoscere, quàm verbis hîc jactare pluribus, quanto compendio veritates plurimas, istis Logisticæ speciosæ notis adhibitis, demonstrare ad oculum quasi aliud agendo, sine tædiosa consequentiarum ullarum concatenatione, nobis licuerit.

XIV.

Hoc pacto autem, uti spero, sequentia obtinebimus: 1. Ut plurimas Euclidis, Archimedis *&* Apollonii *propositiones ex definitionibus, &, quæ inibi proponentur magnitudinum generationibus, tanquam immediata aut simpliciore consequentiâ firmata consectaria inferamus: 2. Palmaria singulorum theoremata (quorum gratiâ ipsi necessum habebant multa alia priùs demonstrare, quorum scientia in se & absolutè non erat adeò expetenda) citra longam antecedentium propositionum & extraneorum principiorum seriem, ex paucis, directis & intrinsecis principiis demonstremus: Ex quo 3. id sponte suâ consequetur, ut ordine magis naturali res pertractandas proponere, primoque loco universalissima & quanti omnibus communia, deinceps verò speci liora & magnitudinibus propria, sed*

cer

ctiones pleræque ex natura sic cognita, viâ rectissimâ brevissimaque, deduci possint.

XI.

Magna porrò cognatio cum ista Cavalleriana intercedit Infinitorum *sive* Progressionum methodo, *in qua, repertâ progressione certâ portionum quotcunque similium, toti cuidam magnitudini circumscriptarum vel inscriptarum, & per bisectionem continuam in infinitum multiplicabilium, tandemque in ipsam magnitudinem (vi doctrinæ* Exhaustionum *Proposit. 1. Lib. X. Euclid. fundatæ) necessariò recidentium, secundùm regulas addendarum ejusmodi progressionum, Summa terminorum istorum infinitorum, adeoque propositæ magnitudinis quantitas aut ratio ad aliam datam magnitudinem definitur. Illa verò desinentia figurarum, e.g. circulo inscriptarum aut circumscriptarum infinitè, cùm non arrideret satis* Renaldino *(tametsi in* λογομαχίᾳ *quadam positus iste dissensus videatur) similem ipsi (quam peculiarem sibi ac propriam vocat) exponit methodum, duodecim theorematibus fundamentalibus innixam & exemplis pluribus deinceps illustratam, Lib. I. de Resol. & Composs. p. 277. & seqq.*

XII.No-

XII.

Noviſſimè quoque IS. NEWTON Geometra ingeniosiſſimus, Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica *ſubtiliter admodum demonſtraturus, Lib. I. Sect. I. Lemmata quædam* de Methodo rationum primarum & ultimarum *præmiſit, ut effugeret tædium deducendi perplexas demonſtrationes, more veterum Geometrarum, ad abſurdum. Cùm enim contractiores reddi demonſtrationes agnoviſſet per methodum indivisibilium, nec ignoraret indivisibilium hypothesin duriorem, & propterea Methodum illam minus Geometricam cenſeri, maluit demonſtrationes ſuas ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primasque naſcentium, i.e. ad limites ſummarum & rationum deducere, quibus idem præſtetur quod per methodum indivisibilium, ac tutius interim uti liceat. Quæ quidem his ipsis ac pluribus aliis verbis inculcat Schol. Lemmatis XI. ſimul ad unam alteramque objectionem, quæ hanc etiam methodum remorari videbantur, explicatiſſimè reſpondens.*

XIII.

Fruſtrà verò eſſemus, ſi methodos hasce

pecu-

peculiares omnes ac singulas hoc quidem loco prolixiùs explicare constitueremus; quandoquidem propositum nobis est palmaria veræ Matheseos theoremata & inventa sic demonstrata dare, ut nunc unâ nunc alterâ istarum, (firmis tamen fundamentis priùs stabilitarum) prout sc. aut hanc aut istam rei demonstrandæ accommodatiorem judicaverimus, usuri simus, atque adeò singularum vim & rationem ipso usu declaraturi. Et quamvis Honoratus in Synopsi p. 8. à Logistica speciosæ terminis abstinendum putet in demonstrationibus Geometricis, quòd tyronibus Algebrica *illa* methodus *paulò difficilior accidat; nobis tamen aliter omninò videtur (imò Virum ingeniosissimum eatenus saltem, quatenus nos fundamentis Algebricis non nisi simplicissimis passim in hoc opusculo usuri sumus, nobiscum sensurum, si hæc nostra videret, confidimus) eo præsertim casu, quo methodus hæc inter ipsas demonstrationes paulatim instillatur; & à primis usque principiis (quibus nihil facilius) ille computus literalis quasi aliud agendo docetur: id quod nos facturi sumus, eique adeò demonstrationum generi paulatim adsuefactos tyronum animos ad* Analysin Geometricam *recentiorem, universæ Matheseos culmen,*

præ-

præparaturi. Malumus autem Lectores nostros ipso facto deinceps cognoscere, quàm verbis hîc jactare pluribus, quanto compendio veritates plurimas, istis Logisticæ speciosæ notis adhibitis, demonstrare ad oculum quasi aliud agendo, sine tædiosa consequentiarum ullarum concatenatione, nobis licuerit.

XIV.

Hoc pacto autem, uti spero, sequentia obtinebimus: 1. Ut plurimas Euclidis, Archimedis *&* Apollonii *propositiones ex definitionibus, &, quæ inibi proponentur magnitudinum generationibus, tanquam immediata aut simpliciore consequentiâ firmata consectaria inferamus: 2. Palmaria singulorum theoremata (quorum gratiâ ipsi necessum habebant multa alia prius demonstrare, quorum scientia in se & absolutè non erat adeò expetenda) citra longam antecedentium propositionum & extraneorum principiorum seriem, ex paucis, directis & intrinsecis principiis demonstremus: Ex quo 3. id sponte suâ consequetur, ut ordine magis naturali res pertractandas proponere, primoque loco universalissima & quantis omnibus communia, deinceps verò specialiora & magnitudinibus propria, sed ad*

enatæ) eumque adeò Matheſeos Enucleatæ *nomen ferre ſuo jure poſſe.*

XVI.

Neque verò aut ignoramus aut conſultò diſſimulabimus, quæ, ſimili consilio, Viri Doctiſsimi jampridem in tollendis, quos hactenus ſubinde tetigimus, Matheſeos priſcæ nævis ac difficultatibus, aut in medium prudenter conſuluerunt, aut opere ipſo laudabiliter præſtiterunt. Nota certè ſunt monita recentiſſima Autoris anonymi de L'Art de penſer, *non minus ſapienter quàm modeſtè data Part. IV. libri laudatiſsimi cap. IX. ac X. Innotuitque dudum laudabilis opera quam* A. Tacquetus *&* Hon. Fabri *aliique jam ſuprà laudati in contrahendis, ordinandis, faciliùs ac directiùs demonſtrandis Veterum inventis geometricis primariis poſuerunt. Extant & Anonymi cujusdam* Elementa Geometrica novo ordine ac methodo ferè demonſtrata *Londini ante hos annos viginti duos edita: Extant P. Ignatii Gaſtonis Pardies* Elemens de la Geometrie *&c. poſt tertiam editionem à Celeberrimo Jenenſium Prof. Schmidtio latinitate donata: Extant P. Mich. Mourgues S. J.* Nouveaux Elemens de Geometrie, abregés par des methodes particulieres en

moins

moins de cinquante propositions &c. *Extant alia plura hujusmodi Matheseos ordinatiùs breviusque tradendæ conamina nobis hactenus titulotenus tantùm nota; & his ipsis demum diebus, quibus hæc prælum subeunt, incidunt in manus nostras* Les Elemens de Geometrie, ou de la mesure du Corps, par le R. P. Bernard Lamy &c. *Parisiis edita 1685; ut actum agere videri fortè nonnullis possimus, qui tentatum satis feliciter tot egregiis ingeniis iter denuò ingredi aliaque viâ discipulos Lectoresque nostros ad magnifica ista Matheseos divina pomœria deducere allaboremus.*

XVII.

Verùm enimverò, quemadmodum nemo vitio vertit unquam Jacobo le Maire, *quòd detectâ feliciter* Viâ Magellanicâ *ex Atlantico mari in Pacificum, hoc excitatus ausu aliam adhuc, eamqe breviorem, & quæsiverit & invenerit; nec ii culpantur, qui per Oceanum Septentrionalem distantes ab istis toto cœlo vias in easdem Terras Indicas etiamnum meditantur: sic etiam, cùm in re tanti momenti, cui perficiendæ penitus unius aut paucorum con-*

 silia

ſilia neutiquam ſufficiunt , poſterior aliquis , præeuntium conatibus laudatiſſimis non incitatus ſolùm , ſed adjutus , inventis addere , aliorum conſiliis ſua jungere , & , quæ ab iſtis jam expolita invenit egregiè , ea ſervare , quæ excoli porrò poſſe credit , liberè monere , modumque excolendi , quem habet , exponere audet , is certè vituperari citra injuriam haut poteſt , nec arrogantiæ ullius accuſari , niſi priorum conatûs deprimere , ſuosque ſolos tanquam optimos , & cum omnium applauſu ubique excipiendos , obtrudere impudenter allaboret : id quod à nobis alieniſſimum eſſe , ipſius opuſculi progreſſus abundè docebit. Præterea , uti ſensûs hominum ab iisdem objectis diverſimodè afficiuntur , ut unus idemque cibus aliorum guſtui ſalitus , aliorum gulæ dulci embammate tinctus , huic aſſus , illi frixus , iſti toſtus , alii elixus , nonnullis conditus , quibusdam etiam crudus , meliùs ſapiat : ita veritas eadem unis hac , aliis aliâ methodo propoſita ac demonſtrata magis arridet , faciliusque & promptiùs quaſi ſubrepit ; ut eò plurium deſiderio cognoſcendarum veritatum mathematicarum conſultum videatur , quò plures viæ ad eandem metam deducentes oſtenſæ fuerint , è quibus ingenio ſuo aptio-

ptiorem eligendi optio cuique relinquatur.

XVIII.

Prodeant ergo in publicum, Bono cum DEO, etiam nostri qualescunque conatûs, post tot alios in eodem genere ingeniosissimos; subeantque intrepidi Lectorum suorum judicia, ex quibus non planè nulla pro se futura certò sibi pollicentur. Hoc saltem dicere salvâ veritate experientiaque teste possumus: Tyronum non paucos, quibus hæc cogitata nostra partim publicè partim privatâ operâ antehac exposuimus (talibus enim hîc unicè seritur metiturque) plerasque demonstrationes nostras neque difficulter, nec sine quadam animi voluptate percepisse; ut spes sit, hoc pacto & iis consultum fore, quibus aut ingenium aut tempus deest priscorum Mathematicorum vasta volumina & consequentiosam demonstrationum longiùs petitarum profunditatem exhauriendi, & cæteros, qui valent ingenio, nec otio destituuntur, excitatum iri, ad evolvenda confidentiùs & avidiùs ingeniosissima ista & orbe toto celebratißima quovis ævo scripta (posteaquam scil. veritates inibi contentas palmarias aliunde breviori faciliorique viâ de-

 mon-

monstratas cognoverunt) à quorum lectione aliàs vel solâ demonstrationum longo plerumque filo contextarum difficultate sub ipsum statim ingressum absterrebantur.

XIX.

Rem ipsam igitur, DEO duce, nunc aggressuri, hæc pauca porrò sub finem præfationis hujus ponemus: 1. Cùm tyronum utilitati, ut suprà jam dictum, hîc unicè consulere studeamus (id quod Professorii muneris ratio imprimis postulat) ideò ne simplicissimorum quidem terminorum explicationes omitti debuisse; maximè cùm propositum nobis esset, ex istis Consectaria quædam immediatè inferendi, quæ aliàs Propositionum ac Demonstrationum numerum absque necessitate augere solent. 2. Ut verbis parceremus, in calculo præsertim Analytico, æqualitatis *signum nos adhibuisse duas virgulas parallelas* =, Barrovio *aliisque eodem significatu dudum adhibitas; pariterque* Quadrati *&* Rectanguli *notiones figuris* □ *&* ▭ *passim exprimi. 3. Cùm quantitates surdæ, præsertim in Solutionibus Analyticis, per signa radicalia usitata passim exprimendæ essent, hæ verò, typographiis nostris exulantia, funa*

demum

demum (quod fieri aliàs facilè potuisset) operis jam cœpti cursus remoræ impatiens non pateretur; illa recepto in Calendariis Arietis signo quomodocunque sic expressa esse, ut simplex huic adjuncta linea $\sqrt{\quad}$ Radicem quadratam, *geminata* $\sqrt{\sqrt{\quad}}$ Radicis radicem, *litera* C *denique adscripta* $\sqrt{C}$ Radicem Cubicam *denotaret.*

XX.

Denique, ut uno quasi obtutu benevolus LECTORIS *oculus, quænam illa sint, quibus commodare Tyronum studiis conati sumus, lustrare, tantoque rectiùs deinceps de conatûs hujus eventu judicare queat; operæ pretium existimavimus, Libelli hujus Contenta* ὡς ἐν συνόψει *hîc exhibere.*

Complectitur igitur hæc Mathesis Enucleata,

Libris duobus, & quaternionibus quasi 30.

I.

L*Ibr. I. Propositiones selectas & palmarias, quas vel* Euclides *in Ele-*

mentis, vel Archimedes *in Libb. de Sphæra & Cylindro, itemque de Circuli dimensione &c. longâ Propp. secundariarum & concatenatarum consequentiarum serie, plerumque indirectè tantùm, demonstrarunt; nunc directè atque ita demonstratas, ut singularum demonstrationes, vel à nullis aliis, vel à paucis antecedd. dependentes, suâ solâ luce seorsim pleraq; radient.*

II.

Eodem modo Libro II. Sectionum Conicarum, *itemque* Conoidis *ac* Sphæroidis, *nec non* Lineæ Cycloidis, Conchoidis, Spiraliumque *proprietates præcipuas, quas apud* Apollonium, Archimedem, *aliosque reperire datur, per ambages aliàs tædiosâ viâ confirmatas, nunc in nucleum quasi compactas; idq;*

III.

Eâ methodo, quæ non tam profundas delassandi judicii meditationes requirit, quàm oculorum otiosum obtutum & applicationem ludibundam præcipuorum ex Logisticâ Speciosa & Indivisibilium Infinitorumque methodo principiorum; *quæ ipsa tamen*

IV. Non

IV.

Non præsupponuntur, aliunde demum (quod molestum multis foret) petenda, sed in ipso operis progressu gradatim ex fontibus suis, incidenter tantùm & prout fert occasio, derivantur.

V.

Quâ eadem occasione passim monente, primaria & usitatissima Praxis verè Mathematica, *sub Consectariorum Scholiorumq; nominibus inspergitur, Tabb. Sin. & Tang. Constructio docetur,* Logarithmorum *origo & usus demonstratur,* Trigonometriæ *tam* planæ *quàm* sphæricæ *præcepta ex ipsis fundamentis eruuntur &c.*

VI.

Incidenter etiam Arithmeticæ puræ praxis, tum vulgaris Decadica, *tum rarior* Tetractyca, *tum deniq;* Surdorum, *quam vocant,* Arithmetica, *à prima sua origine deducuntur. Quibus omnibus tandem*

VII.

Tanquam complementum præcipuum, accedit Introductio in Analysin Speciosam *sive*

ſive Geometriam Novam, *ad Carteſii præcipuè methodum, ſed ex recentioribus inventis multùm facilitatam, accommodata & quoad artis præcepta 6. aut 7. ad ſummum pagellis comprehenſa, exemplis verò per omnia Æquationum genera 40. pluribus illuſtrata.*

Quid de hoc qualicunque labore noſtro, in tyronum uſum unicè directo judicaturi ſint æqui Lectores, dies docebit: Autor ipſe ſaltem inter omnes lucubratiunculas ſuas hanc præcipuo loco ponit.

MATHESEOS ENUCLEATÆ

sive

Elementorum Mathematicorum

LIBER PRIMUS

SECTIO I.

Matheseos Universæ prima principia exponens; è quorum numero præcipuè sunt

Definitiones Primæ

Et quæ ex his fluunt Consectaria.

CAPUT I.

Eas Definitiones sive terminorum explicationes complexum, quæ Matheseos objectum concernunt.

DEFINITIO I.

MATHESIS est Entis quatenus quantum est vel æstimabile, h. e. Quantorum & Quantitatis scientia. Et meretur illa quidem *Universalis* cognomen, quamdiu circa proprietates quantis omnibus aut ple-

 risque

sive Geometriam Novam, *ad Cartesii præcipuè methodum, sed ex recentioribus inventis multùm facilitatam, accommodata & quoad artis præcepta 6. aut 7. ad summum pagellis comprehensa, exemplis verò per omnia Æquationum genera 40. pluribus illustrata.*

Quid de hoc qualicunque labore nostro, in tyronum usum unicè directo judicaturi sint æqui Lectores, dies docebit: Autor ipse saltem inter omnes lucubratiunculas suas hanc præcipuo loco ponit.

MATHESEOS ENUCLEATÆ

sive

Elementorum Mathematicorum

LIBER PRIMUS

SECTIO I.

Matheseos Universæ prima principia exponens; è quorum numero præcipuè sunt

Definitiones Primæ

Et quæ ex his fluunt Consectaria.

CAPUT I.

Ex Definitiones sive terminorum explicationes complexum, quæ Matheseos objectum concernunt.

DEFINITIO I.

MATHESIS est Entis quatenus quantum est vel æstimabile, h. e. Quantorum & Quantitatis scientia. Et meretur illa quidem *Universalis* cognomen, quamdiu circa proprietates quantis omnibus aut ple-

 risque

risque communes demonstrandas occupatur. Ubi verò ad quantorum aut quantitatis species descendit, & affectiones huic aut isti speciatim, aut sub conditionibus specialibus, convenientes contemplatur, per varia nomina in partes varias, pro quantorum diversitate varia, distribuitur.

Definitio II.

QUantum* autem, hoc generali nominis significatu, dicitur, quicquid ullâ ratione æstimari potest; nimirum immediatè rerum habitudines & qualitates, e. g. multitudo planetarum in cœlo aut militum in exercitu Cæsareo, longitudo funis aut itineris, locorum distantia, lapidis gravitas, motûs tarditas aut celeritas, gemmarum pretium &c. mediatè verò res ipsæ quibus æstimabiles illæ qualitates insunt. Unde non incongruè quis cum Acutissimo WEIGELIO ad quatuor genera revocaret hæc omnia, nimirum ad *Quanta Naturalia*, h. e. ab ipsa natura constituta, aut naturam constituentia, ut sunt e. g. Materia ipsa cum extensione & partibus suis, potentiæ & vi-

* Hæc laxior vocis *Quanti* significatio minus placet *Joh. Wallisio*, existimanti Numerum & Magnitudinem, vel solas esse, vel saltem præcipuas quantitatis species; reliqua verò non nisi reductivè ad quantitatem propriè dictam pertinere, quatenus nempè vel Mensuræ vel numeri sunt capacia. Operum Mathem. Part. 1. p. 1. & 2. Sed hæc de nomine lis est, rerum cupidis vix attendenda.

& vires corporum naturalium, Gravitas, Motus, Locus, Lux, opacitas, perſpicuitas, calor, frigus &c. ad *Quanta Moralia*, h. e. ex more hominum & voluntatis arbitrio maximam partem ſaltem dependentia; qualia ſunt e.g. rerum valor & pretium, Perſonarum dignitas & poteſtas, actionum bonitas aut malitia, meritum vel demeritum, præmia vel pœnæ &c. ad *Quanta Notionalia*, h. e. à notionibus & operationibus intellectûs oriunda, ut ſunt e.g. Conceptuum & *Effatorum* amplitudo vel anguſtia, univerſalitas aut particularitas &c. in Logicis, *Longitudo* aut brevitas ſyllabarum, accentus, tonus &c. in Grammaticis; tandemque ad *Quanta Transſcendentia*, h. e. in moralibus, notionalibns & naturalibus paſſim obvia; qualia ſunt v.g. *Duratio*, h. e. exiſtentiæ continuatio, quæ in naturalibus ſpeciatim *Tempus* appellatur inſtar ſpatii unâ ſola dimenſione longiſſimè exporrecti concipiendum; *Unitas* item & *Multitudo* ſive *Numerus*, Neceſſitas & contingentia &c.

DEFINITIO III.

NUmerus (de quo ſpeciatim quædam annotanda ſunt) ſi concretè ſpectetur, nihil aliud eſt quàm Entium quorumcunque aggregatum vel multitudo; in abſtra-

ꝯcto verò eſt ipſa *μονάδων ποσότης*, ut Euclides loquitur, ſive *Entium quotitas*. Ibi ergo numerus h. e. *multa* opponuntur *uni*, eoque ſenſu unitas non eſt numerus; hîc verò unitas etiam numerus eſſet, cùm non minus, quàm binarius aut ternarius, ſit aliqua quotitas. Cæterum ut entia ſingula, cùm univerſaliter de ipſis loquendum eſt, elementis alphabeticis, A, B, C (*a*, *b*, *c*) &c. tanquam ſignis univerſaliſſimis commodè utiliterque ſignificamus; ita numerorum innumerabilibus varietatibus diſtinctè & compendiosè exprimendis excogitatæ ſunt ab hominibus notæ variæ, quarum omnium naturaliſſimæ ſunt puncta ſub forma extenſionis diſpoſita (e. g. ... ternarium, ... novenarium &c. deſignantia;) praxi verò omnium accommodatiſſimæ vulgares illæ barbaræque cyphræ, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, quarum inventionem Arabibus nos debere communis eſt traditio. His quippe pauciſſimis quemcunque quantumvis magnum numerum exprimere ſtupendo non minus ac nobis hodie familiari artificio licet, dum inventor earum hanc ipſis legem arbitrariam ſemel ſancivit, ut prima ex iſtis unitatem, ſecunda binarium &c. denotaret, quoties ponerentur ſolitariæ; cum aliis

verò

verò & juxta se invicem positæ, vel etiam à læva unius pluriumve Zero sive o (quorum munus esset non significare quicquam, sed vacua solùm loca monstrare) collocatæ, loco secundo versus sinistram valerent tot decades; tertio tot centenarios; quarto tot millenarios; quinto tot myriades sive decades millenariorum; sexto tot millenariorum centurias; septimo tot millenariorum millenarios, aut breviùs tot milliones; octavo tot millionum decades &c. quot alias earum quæque significat unitates; idque sic porrò in proportione decupla, per decem, centum, mille perpetuò progrediendo.

Consectarium 1.

Hinc ratio & origo regulæ, pronunciatum ore quemcunque numerum his notis ritè exprimendi & scribendi; siquidem, si v. g. numerus anni proximè imminentis à Christo nato millesimi sexcentesimi octogesimi noni, veniat exprimendus istis notis, ex lege dicta manifestum est, notâ 9 loco dextimo sive primo, 8 loco secundo, 6 rursum loco tertio & 1 loco quarto scriptis, rem procinus confectam fore; neque difficilius attendenti undecim millia, undecies centum & undecim (quem numerum B. Swenterus in Delit. Physico-Mathem. Part. 1. Probl. 75. scribendum proponit) suis notis decenter exprimere.

Consectarium 2.

PAriterque hinc apparet fons & ratio regulæ Arithmeticæ, scriptos hac arte numeros vicissim ritè enunciandi, in hoc solo positæ, ut à dextima nota incipiendo sub quarta quavis nota punctum signetur (eâ tamen quæ jam punctata est, semper connumeratâ) & super secundo quovis puncto virgulæ, primùm una, deinde duæ, tres &c. notentur; ut hæ milliones, bimilliones, trimilliones &c. illa verò interjectos millenarios designent: id quod pluribus hoc loco exponere, esset actum agere.

Scholion.

ILlud interim hac occasione præterire non debemus, quod circa rationem numerandi meditatus est antehac laudatissimus antè WEIGELIUS, nec obscurè indicaverat *Joh. Wallisius* Operum Math. Part. I. p. 25. & 66. exemplis utrobique numerandi saltem & enunciandi modum declarans, si, prout hodienum ab unitate ad denarium usque numerando ascendimus (cujus rei causa, quam prolixè inquisiit Aristot. Probl. 3. Sect. XV. procul dubio à denario digitorum numero petenda est) ab initio statim, quod Thracum quoddam genus olim fecisse testatur eodem loco Philosophus, ad quaternarium tantùm processissent, indeque reflexione factâ ad unitatem, eodem artificio cætera peregissent, immane quantum simpliciorem ac faciliorem nobis fuisse nascituram artem Arithmeticam universam. Id quod vel ex hoc solo judicare licet, quòd ad multiplicationem ac divisionem non alio foret opus abaco Py-

thago-

thagorico (das Einmal eins vulgò dicto) quàm hoc simplicissimo & brevissimo:

1. 1. 1.			semel unum est unum
2. 2. 10.	h. e.		bis duo sunt quatuor
2. 3. 12.			bis tria sunt quatuor & duo
3. 3. 21.			ter tria sunt biquatuor & unum.

Quamvis autem dolendum est, hodie non ampliùs integrum esse, ut innumeris modis facilior futurus hic computus hactenus usitato substituatur, quòd hic jam receptus sit universaliter & proportioni decuplæ pleraque jam mensurarum & quantitatum genera sint accommodata; non debet tamen is in Mathesi prorsus negligi, quæ sola meo judicio fructum hinc potuisset sperare longè maximum, in Trigonometria præcipuè, nisi Logarithmorum ingeniosum pariter inventum jam antè locum hunc occupâsset. Est autem totius hujus *Tetractyos* fundamentum in tribus hisce notis 1, 2, 3 tantùm positum, eâ lege ut solitariæ positæ simplas unitates, loco secundo tetrades, sive totidem quaternarios aut quaterniones, loco tertio, sedecades, loco quarto sedecadum quaternarios &c. notarent, in proportione quadrupla perpetuò progrediendo. Cui numerandi modo non fuissent defutura æquè commoda vocabula, ac sunt ista altera nobis jam familiaria, unum, decem, viginti, centum, mille &c. prout subjectæ comparationi attendentibus palam erit.

Vulgò			
Eins/	Unum	1	Unum, Eins
Zehen/	Decem	10	Quatuor s. Tetras. s. quaternio. Vier/ Ein Wurf oder Erf
Zwantzig/	Viginti	20	Biquatuor, Zwey vier/ Zwerf

 Dreys-

Dreyssig/ Triginta 30	Triquatuor, Drey vier/ Dreff
Hundert/ Centum 100	Tetraquaternio sive Tetractys, Ein Secht
Tausend/ Mille 1000	Quadri-tetractys s. Quartana, Ein Schock
Zehen T. Myrias 10000 &c.	Tetraquartana, Ein Vierschock etc.

DEFINITIO IV.

MAgnitudo vocatur, quicquid habet partes extra partes communi termino copulatas, h. e. omne localiter-extensum sive continuum: In magnitudine verò *Punctum* appellatur illud minimum quod nullas prorsus habere partes concipimus, nullamque adeò magnitudinem, omnis interim magnitudinis principium.

DEFINITIO V.

SCilicet, si concipiamus punctum A (*Fig. 1.*) moveri sive fluere versus B describet hoc suo fluxu magnitudinem A B unius tantùm dimensionis, h. e. longitudinem latitudine carentem, aut sine latitudine saltem conceptam, quam vocamus *Lineam*: Si tota linea A B porrò ita moveri concipiatur, ut ejus extrema puncta A & B descri-

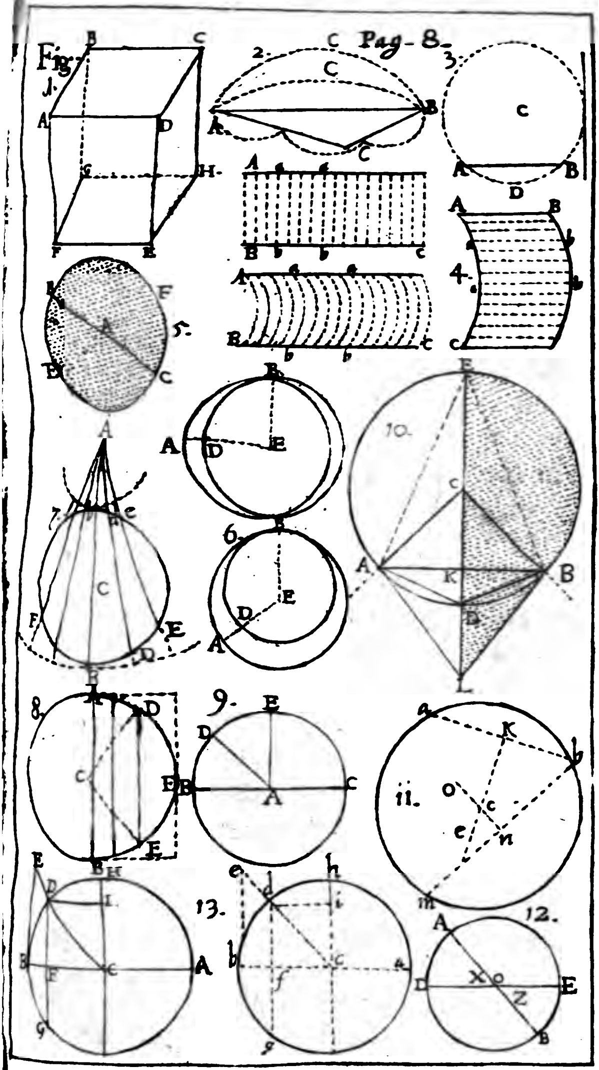
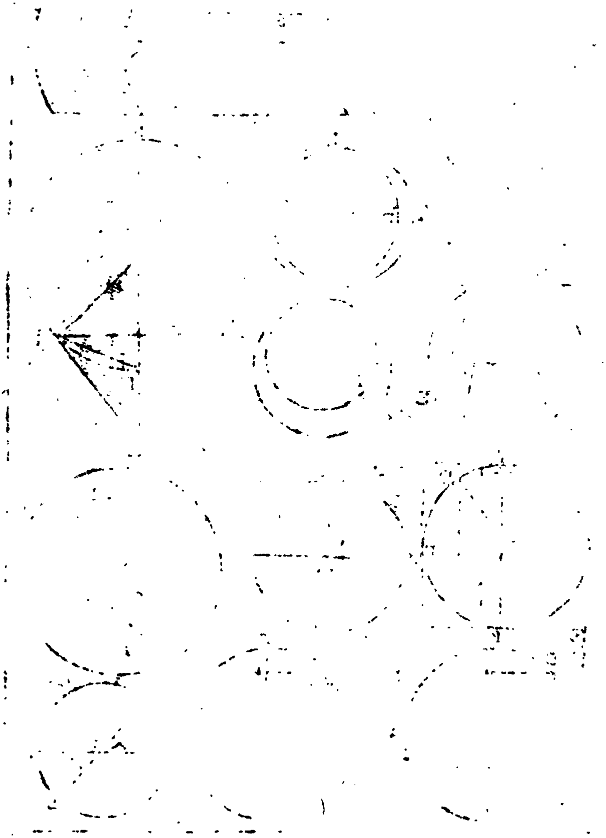


Fig. 1.
Pag. 8.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.



describant alias lineas B C &. A D, ipsa describet hoc suo quasi fluxu magnitudinem ABCD vel (breviùs eam signando per oppositas transversim literas) A C, aut B D, longitudine latitudineque præditam, sed profunditate vel altitudine carentem, aut saltem absque hac concipiendam, quam dicimus *Superficiem*: Si denique hæc superficies A C concipiatur ita moveri, v. g. deorsum, ut ejus opposita puncta A & C iterum alias decurrant lineas A F & C H, ejusque adeò singulæ lineæ alias superficies &c. hoc ejus fluxu sive motu producetur magnitudo trium dimensionum, quam *Corpus* appellamus aut solidum, duabus iterum literis è diametro oppositis A H vel D G &c. notandum. Prout autem variat hic puncti aut lineæ, aut superficiei alicujus fluxus, ita varia quoque gignuntur linearum, superficierum & corporum genera: Corporis autem fluxus sive motus non nisi aliud corpus seipso majus, non verò plures dimensiones potest producere.

Consectaria.

1.

PEr æqualia intervalla igitur, eâdem similive viâ, (e. g. rectissimâ sive brevissimâ) incedentia puncta æquales lineas describunt; Et

2. Eadem vel æquales lineæ, per æqualia intervalla, secundùm eandem viæ rectitudinem

ſive curvitatem delatæ, pariunt æquales ſuperficies; Et

3. Superficies æquales, iisdem conditionibus latæ, æqualia gignunt corpora: *quæ ſunt prima fundamenta methodi indiviſibilium, ſi rectè intelligantur, indubia & infallibilia. Probè ſc. hic diſtinguendum eſt, e. g. inter viam quam decurrit ipſa linea vel ſuperficies deſcribens, & viam quam deſcribunt ejus extrema. Quamvis enim e. g. punctum a* (Fig. 24.) *viâ obliquiore quàm A decurrat, ideoq; longiorem lineam* ac *deſcribat; ipſa tamen linea* ab *cum linea* AB *æquale decurrit motu parallelo intervallum, idem ſc. quod tota* Ab, *cujus ipſa ſunt partes.* Vid. Fabri Synops. p. m. 13.

Definitio VI.

HAnc verò Magnitudinum Geneſin ut porrò proſequamur (utpote ad Earum naturam & proprietates intelligendas plurimùm facientem,) ſi punctum A ad B breviſſimâ decurrat viâ, (*vid. Fig. 2.*) deſcribit lineam AB *Rectam* dictam; ſin aliâ quacunque, *Curvam* aut compoſitam ACB; ut rectiſſimè hinc cum *P. Mourgues* inferre liceat hæc

Conſectaria.

I.

DUas rectas (*a*) ab eodem puncto A incipientes & in idem B deſinentes neceſſariò co- inci-

(*a*) Euclid. ax. 14.

incidere, nec posse comprehendere aut claudere spatium; aliàs alterutra deviaret & sic non esset recta.

2. In spatio tribus rectis lineis AB, BC, CA, (a) comprehenso duas quasvis simul sumptas tertiâ solâ esse majores. Sed & addere porrò anticipando hoc

3. In circulo rectam ab A ad B ductam (*Fig.* 3.) cadere intra circulum, siquidem viam curvam ADB, mox dicto modo descriptam, rectâ longiorem, necessum est extrorsum deviare; tandemque

4. *Tangentem* propriè dictam, quæ sc. (b) *circulum* non secet, in unico puncto eum tangere.

Similiter si recta linea AB (*Fig.* 4.) super alia recta BC eodem semper positu profluat, generabit *superficiem planam*, quam applicata quaquaversum recta linea omnibus suis punctis tangit, ut eam *Fabry* rectè describit; Si recta super curvam, aut curva super rectam excurrat &c. *Curvam* generabit *superficiem*, extus *gibbam* sive *convexam*, intus *cavam* appellandam.

DEFINITIO VII.

SI recta linea altero sui puncto A fixa, altero B in orbem moveatur (*Fig.* 5.) describet hæc suo motu planitiem circularem sive *Circulum*, extremi verò puncti sui B fluxu,

(a) Eucl. L. I. Prop. 20.
(b) Prop. 2. Lib. III.

xu, ipsius *Peripheriam* seu *Circumferentiam* sive *Lineam circularem* BEF. Punctum A fixum vocatur circuli centrum; lineæ AB, AC &c. ejus *Radii* sive *Semidiametri*, omnes inter se necessariò æquales: Recta BC quæcunque per centrum educta, & ad peripheriam utrinque terminata, *Diameter* appellatur, planitiem in duos semicirculos BECB & BFCB dividens: Circumferentia cujusvis circuli, sive magni, sive parvi, unanimi artificum consensu in 360 partes æquales, quas *gradûs* appellant, divisa concipitur, & gradus quilibet in 60 minuta &c. Cæterùm quis non videt, hac circuli geniturâ præsuppositâ, in propatulo esse sequentia.

Consectaria?

1.

DUos circulos se mutuò secantes non (a) habere idem centrum; siquidem aliàs è centro communi E (*Fig. 6.*) ducti radii ED & EA æquales forent communi radio EB, & sic inter se quoque pars & totum.

2. Neque duos interiùs se tangentes ob (b) eandem rationem.

3. Linearum à puncto A (*Fig. 7.*) extra circulum assumto in cavam circuli peripheriam (c) eductarum, eam quæ per centrum C transit, nempe

(a) Euclid. 5. L. III.
(b) & 6. Ejusd.
(c) Eucl. 8. Lib. III.

nempe AB omnium esse maximam, reliquarum autem propiorem quamvis AD, remotiore AE majorem: In convexam autem incidentium è contrario, eam quæ versùs centrum excurrit Ab minimam omnium, cæteras gradatim majores, neque plures quàm duas, AE & AF, vel Ae & Af, æquales esse; prout hæc omnia ductis ex centro A per B, D, E, b, d, e circulis aliis erunt evidentissima. Vel sic: Ducto gemino circulo alio, radiis AB & Ab, si concipiamus radios Ab & Cb simul dextrorsum moveri, eorum extrema semper magis ab invicem discedere manifestum est; idemque palpabile de radiis AB & CB simul dextrorsum motis.

4. Similiter *(Fig. 8.)* intra circulum *(a)* ductarum plurium diametrum esse omnium maximam, reliquas gradatim minores, quo sunt à centro remotiores &c. id quod figuræ quadrilateræ includenti utcunque circulum, & ad curvitatis genesin attendenti non potest non esse palpabile; sicut alia multa quæ nunc prætermimus. Vel sic: Quia duo radii CA & CB obviam sibi moti, tandemque concursuri necessariò semper magis magisque ad se invicem accedunt extremis suis.

Definitio VIII.

Linearum porrò duarum, AB, AD &c. *(Fig. 9.)* circa fixum punctum A ab invicem diductarum apertura *Angulus* appellatur, tribus literis D, A, B exprimi solitus, (qua-

(a) Prop. 15. Lib. III.

(quarum illa quæ punctum fixum, tanquam anguli verticem designat, medio loco pronunciatur) & arcu circulari BD sive graduum interceptorum numero mensurabilis. Apertura igitur omnium maxima BAC, cùm duo anguli *crura* AB & AC eandem rectam constituunt, mensuratur semicirculo sive 180 grad. media BAE vel CAE, cum unum crus EA super alterum AB vel AC rectà erigitur, ut nec huc, nec illuc inclinet (*Linea perpendicularis* inde dictum) *Angulus rectus* vocatur, cujus adeò mensura est circuli quadrans sive 90 gr. & consequenter Semicirculus mensura duorum rectorum. Apertura denique sive angulus recto minor BAD (paucioribus quàm 90 gradibus mensuratus) *Acutus*; is verò qui recto major est, veluti DAC (plurium adeò quàm 90 grad. mensuram habens) *Obtusus* nuncupatur. E quibus prono nunc alveo fluunt hæc

Consectaria.

I.

Duos aut plures quoscunque angulos contiguos (a) super eadem recta BC ad idem punctum A constitutos (ut DAB & DAC, vel DAB, DAE & EAC) conficere duos rectos, utpote semicirculum complentes; & consequenter

2. Omnes

(a) Euclid. 13. Lib. I. cum Coroll.

2. Omnes angulos circa punctum A undiquaque positos (utpote totum circulum exhaurientes) æquivalere 4 rectis: Quemadmodum etiam ex opposito, *(a)* si ad lineam rectam AC ejusque punctum A duæ aliæ rectæ AB & AD fecerint angulos contiguos æquales duobus rectis h. e. semicirculum exhaurientes, BC necessariò est diameter circuli adeoque una recta linea.

3. Si unus contiguorum BAE rectus est, etiam alterum CAE rectum esse.

4. Si duæ rectæ AB, CD se mutuò secuerint in E, 4 illos angulos quos efficiunt æquivalere 4 rectis.

5. Quemadmodum autem per se patet, *(Fig. 10.)* quocunque circulo secundum ductum diametri ECD complicato, duos semicirculos EHD & EID debere mutuò congruere; ita, si angulus ACD angulo BCD, h. e. arcus AD arcui BD, æqualis ponatur, unumque crus CK vel CL commune, cæteris AC & BC jam ante æqualibus,

Primò bases BL & AL, KB & KA etiam *(b)* æquales fore; nam & hæ congruent & è converso basibus congruentibus, etiam anguli:

Secundò Bisectâ lineâ AB in K, duos angulos *(c)* ad K similiter congruentes & æquales, adeoque rectos, esse & contrà:

Tertiò Angulos ad basin æqualium *(d)* crurum,

(a) Euclid. Lib. I. Prop. 14.
(b) Ejusd. Lib. I. 4. & 8.
(c) Lib. III. 3.
(d) Lib. I. 5.

rum, CAB, CBA, quin & prolongatis cruribus in F & G contiguos utriq; infra basin, itidem congruere.

Quartò: Ipsa adeò spatia ACL & BCL, ACK & BCK totaliter æqualia esse.

Quintò etiam angulos AED & BED contiguos æqualibus arcubus AD, BD insistentes æquales esse & contrà; Quin & non contiguos, si verticibus suis æqualiter ab E distent &c.

6. Hinc porrò manifestum est, cùm ex medio cujuscunque rectæ AB circulo inscriptæ ducta perpendicularis, vi modò dictorum per centrum transeat, si hoc idem fiat in duabus lineis ab & bm, (*Fig. 11.*) duos quoscunque arcûs aut tria quæcunque puncta non in directum posita, a, b, m, connectentibus, illas duas perpendiculares k e, n o, determinaturas esse centrum circuli per dicta tria puncta ducendi.

Definitio IX.

SI rectam AB alia recta DE secuerit, (*Fig. 12.*) anguli ACD & ECB circa verticem communem oppositi *Verticales* dicuntur, sicut & alteri duo ACE & DCB; clarentque statim hæc definitionis

Consectaria:

1.

QUòd & illi & hi verticales semper sint (*a*) æquales; siquidem tam ACD quàm ECB cum eodem tertio ACE absolvunt semicirculum,

(*a*) Euclid. Lib. I. 15.

lum, pariterque tam ACE quàm DCB cum tertio communi ECB.

2. Econtrà si ad rectam unam DE, atque (a) ad ejus punctum C duæ lineæ oppositæ AC & CB fecerint angulos verticales x & z inter se æquales, quòd AC & CB faciant unam lineam rectam; siquidem, cùm x & o exhauriant semicirculum, z autem & x ex hypothesi sint æquales, etiam o & z exhaurient semicirculum, cujus adeò diameter est ACB.

3. Eodem argumento constabit ex 4 lineis (b) ab eodem puncto egressis eâ conditione ut bini oppositi verticales anguli æquales sint, binas oppositas AC & CB, item DC & CE facere utrobiq; rectam unicam; siquidem cùm omnes 4 anguli simul absolvant integrum circulum, sive 4 rectos, & summa ex x & o sit æqualis summæ ex o & z per hyp. necessum est & illam & hanc absolvere semicirculos, quorum Diametri sint AB & DE, adeoq; rectæ lineæ.

Definitio X.

IN circulo quolibet recta linea v. g. DG arcui cuicunque DBG subtensa, *chorda* dati arcus, (*Fig. 13.*) uti BF (pars abscissa semidiametri BC per chordam mediam excurrentis) *sagitta* vel *sinus versus*, DF autem in semidiametrum BC ab altero extremo dati arcûs BD ad angulos rectos demissa,

(a) Ejusd. Prop. Schol. 1.
(b) Schol. 2.

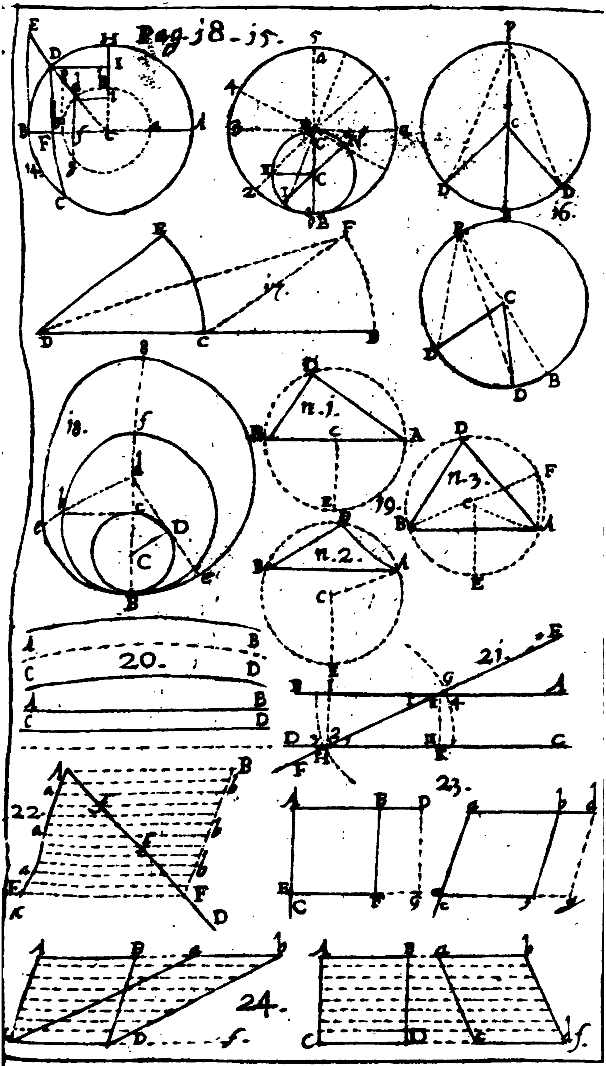
missa, *Sinus Rectus* ejusdem arcûs BD, vel anguli BCD, appellatur; uti DI pariter *Sinus Rectus complementi* DH vel anguli DCH &c. Rectorum autem horum sinuum omnium maximus HC, ab altero extremo quadrantis HB demissus (reipsâ idem cum semidiametro circuli) *Sinus totus*, item *Radius*; BE denique arcûs BD vel anguli BCD Tangens; CE verò eorundem *Secans*, destinato artificum consilio dictæ sunt, eodemque non sine fructu maximo constitutum, ut Sinus totus vel radius cujuscunque circuli divisus conciperetur in 1000, 10000, 100000, 1000 000, 10000 000 &c. particulas, & ex eo numero cujusvis arcûs vel anguli Sinus, Tangens, Secans &c. æstimaretur; prout ex Tabb. Sinuum, Tangentium & Secantium abundè videre est. Nos ex his ipsis suppositis ac terminorum explicationibus elicimus sequentia definitionis hujus

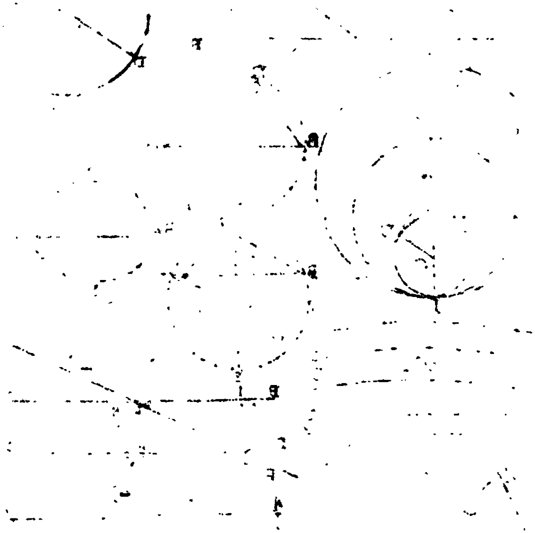
Consectaria.

I.

IN æqualibus circulis (atque adeò multò *(a)* magis in uno eodemque) sicut radii vel semidiametri, BC & bc, æquales sunt, ita æqualium quoque arcuum, BD ac bd, sivè angulorum

(*a*) Inter cætera Euclid. 28. & 29. Lib. III. ex parte etiam 26. & 27.


Pag. 58. 55.
14.
16.
17.
18.
19.
n.1.
n.2.
n.3.
20.
21.
22.
23.
24.



lorum BCD & bcd, ſinûs rectos DF ac df, Tangentes BE ac be; Secantes CE ac ce, itemq; ſubtenſas ſive chordas DG & dg, item ſagittas BF & bf, arcuum duplorum DBG & dbg &c. æquales eſſe, eodemque adeò partium ſinûs totius gaudere numero & contrà; prout certè tum ex dictis per ſe patet, tum verò, ſi circulus circulo & radius BC radio bc mente ſuperimponatur, ut mutuò congruant, ob ſuppoſitam æqualitatem arcuum BD ac bd reliqua omnia neceſſariò unà congruere palpabile eſt; Et contrà

2. *In* circulis inæqualibus autem æqualium *angulorum* BCD & bcd *(Fig. 14.)* ſive ſimilium arcuum totidemve graduum BD & bd, *ſimiles* eſſe quoque ſinûs, tangentes &c. h. e. *ſinum* df totidem habere partes ſui radii bC, quot habet DF ex ſui radii BC partibus &c. E. g. ſi radius BC ſit duplus radii bc, partes 1000mæ illius ſingulæ erunt duplæ partium milleſimarum hujus, ſunt tamen mille utrobique; ſicuti gradûs etiam in circumferentia minore particulatim in arcu bd duplo minores ſunt gradibus in arcu BD, & tamen numero utrobique æquales. Pariter ergo, ſi ſinus DF haberet 700 ex partibus mille ſui radii BC, etiam df haberet 700 ex partibus mille minoris radii bc, ſimiliterque chordæ DG & dg, Tangentes BE & be &c. totidem ſemper partes ſui utræque radii.

Scholion.

OBiter autem hoc loco non adeò incongruum (tametsi post doctrinam de Proportionibus demum hæc talia docenda videri queant) suo vero loco utilissimum fuerit, monuisse, quòd, si v.g. gradûs majoris circuli singuli sint dupli aut tripli aut quadrupli &c. graduum minoris circuli, prout sc. illius radius radii hujus duplus aut triplus fuerit, *in praxi* saltem mechanicâ facilè haberi possit arcûs majoris peripheriæ, qui sit æqualis toti peripheriæ minori; nimirum si reciprocè ea pars sumatur ex peripheria majore, quota est radius minoris ad radium majorem, aut gradus unus peripheriæ minoris ad gradum unum peripheriæ majoris collatus. E.g. si minor radius bc sit dimidium majoris BC, & sic etiam peripheria & gradus singuli illius, *dimidii* peripheriæ & graduum singulorum hujus, reciprocè dimidium peripheriæ majoris æquabitur toti peripheriæ minoris, sive 180 gr. illius 360 hujus &c.

2. Quod idem (saltem in hoc ipso casu quo radius cb radii CB duplus est) geometricè quoq; præstari posset ex hoc fundamento: Descriptis utroque radio circulis, ponamus radium CB (*Fig. 15.*) circa centrum c sic rotari æquabiliter, ut interea radium majoris circuli cb secum abducat, perveniensque v.g. ad I. hunc etiam sistat in 1. pergensque ad II, hunc etiam sistat in 2 &c. manifestissimum attendentibus erit, ubi radius minor CB decurrerit semicircumferentiam B. II. III. insimul majorem radium cb promotum ad 3 usque præcisè absolvisse suæ peripheriæ quadrantem; & si jam perrexerit minor radius C. IV. dextrorsum emo-

veri

veri & majoris continuationem c 4 porrò in easdem partes secum abducere; necessum est, eodem momento, quo radius C. IV. (unà cum c 4) ad primum situm in B pervenit integro descripto circulo, radium c 4 oppositum pervenisse ad 5 & absolvisse circuli sui dimidium, delatum ita motu prorsus æquabili. Hoc jacto fundamento patet, uti circulus minor integer respondet majoris dimidio, & illius dimidium hujus quadranti; ita quadrantem B II. respondere octanti b 2 &c. Unde dato quocunque arcu, v.g. B. I. in circulo minore, si ducatur per I. radius majoris c 1. abscinderetur arcus b 1. *dato* magnitudine æqualis at numero graduum *dimidius*.

3. Ut hinc sponte suâ consequatur nobilissimum *Euclidis* Theorema, quòd angulus ad centrum B C. I. vel B C. II. sit duplus anguli correspondentis ad peripheriam b c. 1. vel b c. 2. &c. quod in hoc casu manifestum, in alteris duobus (*Fig. 16.*) de totis vel residuis DGD ac DPD pariter, (*a*) indubium est, quod de partibus vel addendis vel invicem subtrahendis BCD & BPD, per casum primum verum est.

4. Ex hoc verò porrò fluit novus modus datum quemlibet angulum CDE vel arcum CE (*Fig.* 17.) bisecandi; Nimirum si cruri DC fiat æqualis CB, & hoc radio describatur arcus BF arcui CE æqualis, ducaturque DF; (*b*) Sic enim erit angulus BCF, p. DCE, ad centrum, & BDF ad peripheriam ipsius dimidius. Eadem verò facilitate anguli dati trisectio quoque haberetur, si radius

(*a*) Euclid. P. 20. Lib. III.
(*b*) Euclid. Lib. I. Prop. 9.

dius major minoris triplus ab hoc æquabiliter pro- veheretur, prout in duplo radio factum, & hîc etiam futurum esse probabile intuitu primo videri possit.

Verùm enimverò, sive immediatè à radio CB (*Fig. 18.*) simplo circumducatur triplus de, sive mediante duplo cb, neutrubi motus erit æquabilis. In posteriore enim casu, dum radius cb absolvit quadrantem Bb, radius de minus quadrante decurrit; verùm dum cb percurreret eadem celeritate quadrantem alterum bf, perveniret radius de ad g per arcum quadrante tanto majorem, quanto prior erat minor. In priore casu contrà, radius CB ad D usque ultra quadrantem decurreret, donec de proveheretur à B ad e; Sed si pergens radius CD eundem de secum iterum adduceret, describeret hic retrò eundem arcum eB, dum ille absolveret multò minorem quàm priùs.

5. Hinc angulus ad centrum ACE (*Fig. 19.*) super arcu dimidio AE æqualis est angulo ad periph. ADB super arcu duplo AB.

6. Hinc angulus ADB in semicirculo (num. 1.) (*a*) rectus est, in minore segmento (num. 2.) recto major s. obtusus, in majore (num. 3.) acutus, quia angulus ad centrum ACE super arcu reliquo dimidio, angulo ADB æqualis est per præced. 5. & idem rectus in 1, obtusus in 2, & acutus in 3 casu manifestissimè.

7. Hinc anguli in eodem segmento (*b*) vel æqualibus æqualium circulorum; sive eidem aut æqualibus arcubus æqualium insistentes, omnes æquales & contrà.

DEFI-

(*a*) Euclid. XXXI. Lib. III.
(*b*) Euclid. 26. & 27. Lib. III.

Definitio XI.

Cùm duæ vel plures lineæ AB & CD (*Fig. 20.*) juxta se invicem ita excurrunt, ut ubique servent eandem distantiam (quarum adeò genesis ex motu duorum punctorum A & C simultaneo & paribus semper intervallis facto facilè concipitur) appellantur *Parallelæ*: Sicut autem ex hac definitione generaliter per se patet, eas (*a*) *quæ* parallelæ sunt eidem tertiæ, inter se *quo*que parallelas esse (cùm æqualibus intervallis addendo sive subtrahendo æqualia alia, tota vel residua simili æqualia esse necessum sit;) ita si parallelæ illæ fuerint lineæ rectæ ab alia recta EF transversim sectæ; promptè quoq; inde fluunt hæc altera.

Consectaria.

I.

Angulos, (*b*) quos vocamus, *alternos* GHK & HGI (*Fig. 21.*) æquales esse per Consect. 1. Def. 10. cùm distantiæ GK & HI, quæ sunt dictorum angulorum sinus recti, æquales supponantur:

2. *Externum* quoque angulum EGA *interno* ad easdem partes opposito GHK pariter

(*a*) Euclid. Lib. I. 30.
(*b*) Euclid. Lib. I. 29.

ter æqualem esse, per Confect. 1. Def. 9. quia externus ille EGA est æqualis angulo hujus alterno HGI, sibi verticali.

3. Eundem internum GHK cum altero interno ad easdem partes opposito AGH (æquè ac externus EGA vi Conf. 1. Def. VIII) æquivalere duobus rectis.

4. Econtrà, si recta quæpiam EF (a) alias duas AB & CD transversim secans angulos alternos GHK & HGI æquales faciat, horum etiam sinûs rectos per Confect. 1. Def. X. æquales, & consequenter lineas AB, CD parallelas esse: Idemque inferetur, si externus interno æqualis, aut duo interni ex eadem parte duobus rectis æquivalere, ponantur; cùm ex utraque hac hypothesi illa prior statim emanet.

5. E quibus non uno modo claret: (b) *Tres angulos internos cujuscunq; Trianguli* (e. g. HGK quod stare hîc pro omnibus aliis potest) *simul sumptos æquivalere duobus rectis, & externum GHD æqualem duobus internis oppositis.* Etenim vel cum Euclide concludere licebit: 1, 2, 3 simul faciunt duos rectos per Confect. 1. Def. VIII. Sed 2 = II & 3 = III. per 1 & 2 hujus. Ergo I, II, III = 2 rectis; vel cum aliis: 1, II, 4. sunt = 2 R. Sed 1 = I & 4 = III per 1 hujus. Ergo &c. Vel brevius cum P. Pardies: 1 = I per 1. hujus; Sed 1, II. III simul = duobus rectis per 3. hujus. Ergo I, II, III = 2 R. Q. E. D.

DEFI-

(a) Lib. I. Prop. 27. & 28.
(b) Lib. I. Prop. 32.

DEFINITIO XII.

SI recta quædam AB (*Fig.22.*) ex apice cujusdam anguli plani CAD moveri concipiatur motu semper sibi parallelo, ita quidem ut alteri cruri AC uno suo extremo A perpetuò inhæreat, alterum autem AD perpetuò secet, donec tandem in F idem crus, altero sui extremo B, contingat, ac tota intra angulum CAD cadat; describet hoc suo motu tum intra crura CAD figuram triangularem *EAF*, tum extra illam aliam etiam triangularem BAF, per sui partes ibi quidem continuè crescentes af, hîc verò continuè decrescentes fb; universis autem sui partibus, atque adeò se totâ, describet figuram quadrangularem AEFB: Consequenter, si ipsum anguli dati CAD (*Fig.23.*) crus alterum AD, aut ejus pars aliqua AB, super altero AC sibi semper parallelum excurrat, iterum describet figuram quadrilateram, & quidem si *describens* AB, sit æqualis *dirigenti* AE, etiam æquilateram; *Sin* alterutra major fuerit, ut AD, opposita solùm latera æqualia habentem; siquidem linea describens sibimetipsi necessariò æqualis est, & puncta A, B, D, æqualiter mota, eodem tempore æquales quoque

lineas AE, BF, DG, describunt. Evidens autem est ex his ipsis quadrangulorum ac triangulorum genesibus,

(Consectaria.)

I.

QUadrilateras illas figuras esse quoque parallelogrammas, h. e. opposita latera haberé etiam parallela; *(a)* Siquidem describens linea supponitur sibi semper parallela, & puncta describentia A & D, vel A & B eodem intervallo semper distant.

2. Cum duo anguli interni *(b)* ad easdem partes oppositi A, & E, item E & F &c. simul æquivaleant duobus rectis per Cons. 3. Def. XI; Si unus angulus v. g. ad A rectus sit, reliquos omnes etiam actu rectos esse, [quo casu fig. quadrilatera simul & æquilatera AF, *quadratum*, altera verò AG *oblongum* sive *Rectangulum* κατ᾽ ἐξοχὴν appellatur:] Si nullus sit actu rectus, oppositos è transverso, a & f, vel a & g saltem æquales esse, siquidem utrique cum eodem tertio e faciunt duos rectos; [quo casu quadrilaterum simul æquilaterum a f, *Rhombus*, alterum a g verò *Rhomboides* audit.]

3. Lineam transversalem *(c)* in quolibet parallelogrammo, ut AE in Fig. præced. 22, divi-

(a) Schol. Prop. XXXIV. Lib. I.
(b) Ejusd. Prop. pars prior.
(c) Ejusd. Prop. pars poster.

dividere ipsum in duo triangula AEF & FAB prorsus æqualia; siquidem & lineæ & anguli omnes utrobique æquales sunt, & quemadmodum describens AB per angulum EAF super dirigente AE promota descripsit Δ AEF; ita describens EF priori æqualis per angulum AFB priori æqualem, super æquali dirigente FB, eodem modo promota describit necessariò æquale triangulum; aut breviùs rem efferendo: indivisibilia af perpetuò crescentia simul omnia, necessariò sunt æqualia totidem indivisibilibus fb, viâ reciprocâ eodem prorsus modo crescentibus.

4. Parallelogramma quæcunque inter easdem parallelas Ab ac Cf. (*Fig.* 24.) constituta, h. e. ejusdem altitudinis, (*a*) si basin eandem CD; aut æquales CD ac cd habuerint, esse inter se æqualia; siquidem descripta concipiuntur à lineis æqualibus AB & ab per idem intervallum parallelarum æquabiliter descendentibus; ita ut & omnia & singula indivisibilia sive elementa AB, & omnibus & singulis indivisibilibus ab (respondent enim numero & magnitudine hæc istis perpetuò) necessariò sint æqualia.

Scholion.

Atque hoc est primum Specimen Methodi indivisibilium à Bonaventura Cavallerio introductæ & nunc facilitatæ; quæ indivisibilia tametsi juxtaposita & in cumulum quasi congesta magnitudi-

(*a*) Lib. I. Prop. 35. & 36.

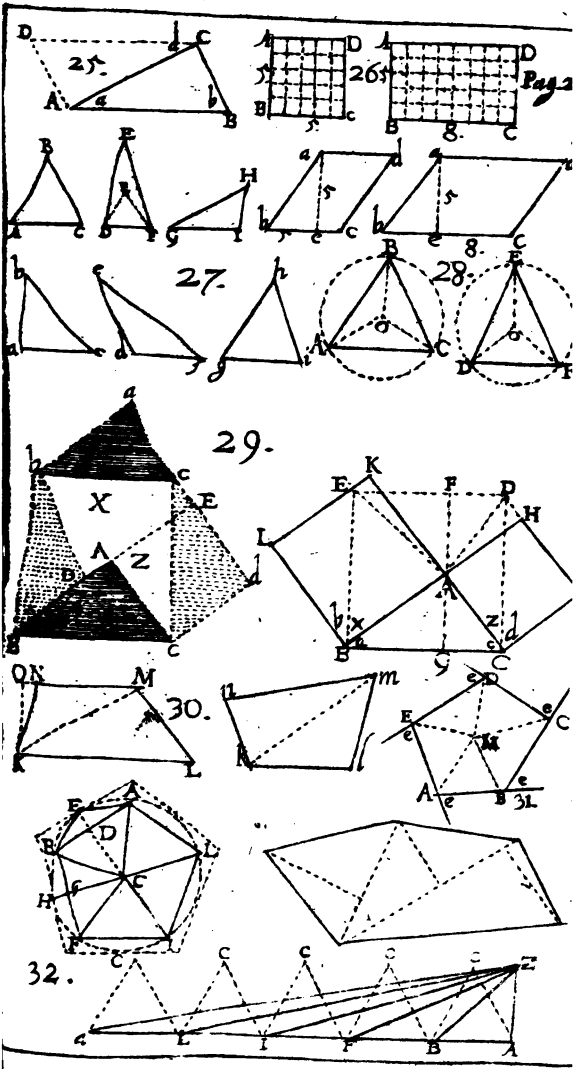
tudinem componere non possunt, motu saltem imaginario eam metiuntur, & negativè quodammodo, (si sc. in una magnitudine concipiamus quemcunque talium elementorum numerum, nec liceat in altera, similium &, vel sigillatim vel summatim, æqualium eodemque modo dispositorum minorem vel majorem concipere) æqualitatem duarum inter se collatarum indubiè demonstrant.

5. Patet igitur etiam Triangula super eadem (a) aut æqualibus basibus C D ac c d, & in iisdem parallelis constituta æqualia esse; quandoquidem sunt parallelogrammorum æqualium A D, & a d dimidia, per Consect. 3. hujus.

6. Scitè porrò *P. Mourgues* ex eo, quòd bini quilibet interni & ad easdem partes oppositi anguli (b) in quolibet parallelogrammo duobus, atque adeò junctim omnes quatuor rectis æquivaleant, evincit, tres angulos in unoquovis triangulo A B C (*Fig.* 25. quod in parallelogrammum compleri semper potest) valere quatuor istorum dimidium, sive duos rectos. Adhuc breviùs ita hæc conciperes; Anguli b † c † d (summa duorum interiorum) = 2 rectis; sed a = alterno d: Ergo b † c † a = 2 Rectis. Q. E. D.

7. Quia manifestum est, in rectangulis parallelogrammis, si altitudo A B & basis B C (*Fig.* 26.) eadem mensurâ longitudinariâ dimensæ

(a) Lib. I. Prop. 37. & 38. & 41.
(b) Lib. I. Prop. 32. aliter.


25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.

mensæ divisæque, per se invicem ductæ motæque concipiantur, * aream AC hinc descriptam unà dividi in mensuras sive areolas quadratas totidem quot laterum numeri per se invicem multiplicati producunt unitates; ideò aream cujuscunque alterius parallelogrammi *similiter* produci, si basis multiplicetur per ejus altitudinem perpendicularem, ac si esset rectangulum ejusdem baseos & altitudinis.

8. Consequenter deniq; per Consect. 3. & 5. Trianguli quoque aream haberi, si basis multiplicetur *per* altitudinis perpendicularis dimidium, *aut*, basi totâ in totam altitudinem multiplicatâ, producti semissis accipiatur.

DEFINITIO XIII.

QUemadmodum autem Triangulorum quoque variæ sunt species, dum *primò* ratione laterum aliud *Æquilaterum* dicitur, ut ABC, (*Fig. 27.*) quod omnia tria latera æqualia habet; aliud *Æquicrurum*, ut DEF, quod crura DE ac EF æqualia habet, basin autem DF illis vel majorem vel minorem; aliud denique *Scalenum*, ut GHI, quod omnia latera inæqualia habet; *deinde* ratione angulorum, aliud *Rectangulum*, ut a, b, c, quod unum habet rectum ad a; aliud

* Ex Genetica methodo manifestum est, nam 5 partes lineæ AB hujus excursu per partem baseos BE, describunt 5 quadratula, & per sequentem partem alia quinque &c.

aliud *Obtusangulum*, ut d, e, f, quod unum *obtusum* ad d; aliud denique *Acutangulum*, ut g, h, i, quod meros acutos habet :- ita quodlibet horum generum peculiares suas habet proprietates, quas infrà partim suo loco demonstrabimus, partim hîc nullo negotio deducimus, tanquam

Consectaria.

I.

SC. omne triangulum æquilaterum esse quoque æquiangulum, & consequenter acutangulum; siquidem, invento centro pro tribus punctis & peripheria A, B, C (*Vid. Fig. 28.*) per Consect. 6. Def. VIII. 3 arcûs AB, BC & AC æqualibus chordis respondentes, & consequenter etiam tres anguli ad centrum O æquales sunt per Consect. 1. Def. X. Ergo & tres ad peripheriam, utpote illorum dimidii per Consect. 3. ejusd. Singuli ergo non sunt nisi tertia pars duorum rectorum per Consect. 6. Def. XII. h. e. ⅔ unius recti, h. e. 60 gr. adeoq; acuti.

2. Eodem modo in Æquicruro angulos ad basin æqualibus cruribus oppositos æquales, (*a*) & consequenter acutos esse; siquidem circumscripto circulo æqualibus chordis DE & EF respondent æquales arcûs, & his æquales anguli ad centrum DOE & FOE, & his æquales ad peripheriam DFE & FDE. Hos autem singulos recto minores h. e. acutos esse, pal-

(*a*) Lib. I. Prop. 5. aliter.

palpabile est, quia unà cum tertio demum faciunt duos rectos. Ergo si tertius solus esset rectus, reliqui ad basin essent semirecti.

Scholion.

Licebit autē (a) hoc loco quasi anticipando videre veritatem Theorematis Pythagorici Hecatombe digni, quod infrà diversis aliis modis demonstrabitur; Scilicet, *In Rectangulo Triangulo B A C,* (*Fig. 29.*) *Quadratum lateris maximi angulo recto oppositi æquale esse quadratis reliquorum laterum simul sumptis.* Etenim descriptis quadratis & reliquorum laterum A C d E, D E a b (sumptâ sc. E D æquali A B) & quadrato maximi B C c b, manifestum erit, partes X & Z utrique parti communes, duo verò reliqua triangula in quadrato maximo B A C & B D b, æqualia esse duobus triangulis b a c & C d c, quæ restant in duobus quadratis laterum minorum, totamque adeò propositi veritatem in propatulo esse; dummodo de his duobus indubiè constet scrupulosioribus: Quòd 1. latus maximi quadrati B b necessariò concurrat cum extremitate minoris D b, & quòd alterum latus maximi C c extremitate suâ c præcisè attingat continuationem laterum minimi & minoris quadrati d E a, prout quidem utrumq; in figura exprimitur; 2. Dicta bina triangula totaliter sint æqualia. Patet autem utrumque hoc modo: Quia anguli ad C cum intermedio Z faciunt rectos, ergo sunt æquales; sunt verò & latus C A lateri c d & C B lateri C c æqualia & anguli ad A & d recti. Ergo, si concipiamus △ A B C revolvi circa C tanquam centrum dextrorsum, congruet △ C d c

(a) Lib. I. Prop. 47.

C d c per omnia & punctum B necessariò cad in lineam continuatam d E, quippe congruenter cum AB. Hinc verò patet nunc c a ⩦ BD, & quia b a quoque ⩦ b D & anguli ad a & D re cti. Quare, si concipiamus △ b a c revolvi circ b tanquam centrum, donec b a coincidat cum b D & a c cum D B, coincidet etiam necessariò b cum b B. Q.E.D.

Huic demonstrationi Schootenii, à nobis illustra tæ & abbreviatæ, adjungemus nostram Euclideæ si miliorem, sed eâdem credo faciliorem, quæ huc re dit: Factis faciendis (quæ *Fig.* 29. altera monstrat △ ACD cum □ AI super eadem basi AC con sistens & in iisdem parallelis, est hujus dimidium sed & dimidium parallelogrammi CF, cum quo super eadem basi DC; Ergo hoc parallelogram ⩦ □ A I. Similiter △ ABE dim. □ AL idemque dimidium etiam parallelogram. BF: Er go BF ⩦ □ AL: Ergo CF † BF h. e. □ BD ⩦ duobus □□ AI † AL. Q.E.D. Nam quod latus BE occurrat lateri LK & latus CI continuato lateri IH hîc adhuc facilius patet; si quidem anguli a & b itemque c & d manife stò æquales sunt, utpote cum eodem tertio X vel Z utrobique rectum constituentes. Revolutum g △ BAC circa B centrum congruet cum BLE & circa centrum C revolutum congruet cum CID &c.

DEFINITIO XIV.

OMnes aliæ figuræ rectilineæ, præter tri lateras & quadrilateras (quibus poste rior

rioribus una adhuc species non parallelogramma, *Trapezium* dicta; ut KLMN (*Fig. 30.*) &c. adjungi debet) uno communi nomine *Multilatera* & *Multangula* sive *Polygona* dicuntur, & speciatim pro multitudine laterum & angulorum, Pentagonæ, Hexagonæ, Heptagonæ &c. Quæ quidem omnes, uti Trapezia quoque, cùm in triangula resolvi possint per lineas diagonales (prout in adjectis 31 & proximè superioribus figg. videre est) in promptu sunt hæc

Consectaria.

1.

Cujuscunque planitiei multangulæ aream haberi posse, si ea resolvatur in triangula & singulorum triangulorum areæ per Consect. 8. Def. XII. inventæ in unam summam colligantur.

2. Aream Trapezii KLMN (in super. *Fig. 30.*) cujus duo saltem opposita latera KL & MN parallela sunt, paulò compendiosiùs haberi, si laterum horum summa per semissem altitudinis communis KO multiplicetur.

Scholion.

Habemus ergo hîc totius *Epipedometriæ* & *Ichnographiæ* fundamentum primarium; circa cujus praxin hoc præcipuè attendendum est, quòd compendium operæ facturi resolutionem in triangula

sic instituant, (*Vid. Fig. 31.*) ut bina quævis in unam eandemque basin sua demittant perpendicula. Sic enim pro binis triangulis unam solùm basin mensurare necessum habent cum duobus perpendiculis, ad aream utriusque supputandam: ad ichnographiam autem conficiendam, perpendiculorum etiam distantiam à proximo baseos extremo metiri oportet; id quod hujus loci quidem non est, in discursu tamen in gratiam Tyronum uberiùs declarabitur.

3. Posse tamen etiam resolutionem istam ex assumpto quovis puncto medio fieri, & latera figuræ multangulæ pro totidem triangulorũ basibus haberi; (*Vid. Fig. 31. altera*) quo casu hæc simul perspicua sunt; 1. Omnes simul angulos polygoni cujuscunque simul æquivalere bis tot rectis, quot habet latera, demptis solùm quatuor rectis; siquidem in tot resolvitur triangula, quot habet latera, & hæc singula suis angulis adæquant duos rectos. Demptis igitur omnibus mediis circa punctum M (qui semper faciunt 4 rectos per Conf. 2. Def. VIII.) restant reliqui, ex quibus constant omnes anguli polygoni. 2. Omnes simul externos angulos cujuscunque figuræ rectilineæ (e, e, e &c.) semper æquivalere 4 rectis; siquidem quilibet eorum cum suo contiguo interno adæquat duos rectos per Conf. 1. cit. Def. & sic universim bis tot rectos quot sunt latera vel anguli figuræ interni. Sed omnes hi interni faciunt itidem bis tot rectos, minus quatuor: Ergo externi conficiunt hos quatuor.

DEFI-

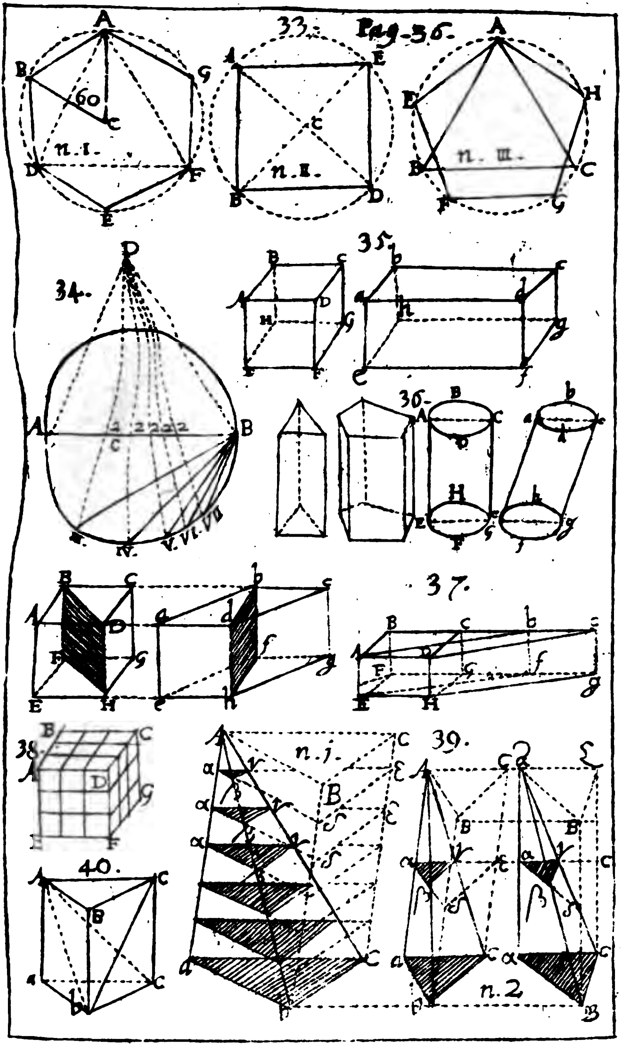
DEFINITIO XV.

EX omnibus autem his figuris planis illæ *regulares* dicuntur, quarum & anguli & latera omnia sunt æqualia, ut in trilateris Æquilaterum triangulum, in quadrilateris quadratum, in cæteris generibus totidem species peculiari nomine carentes; aliæ verò omnes, in quorum vel angulis vel lateribus inæqualitas aliqua occurrit, *irregulares* appellantur: etiam si harum quoque nonnullæ, sicut illæ omnes, *circulo* sint *inscriptibiles*. Quibus intellectis in promptu erit inferre hæc

Consectaria.

I.

REgularium figurarum areas adhuc facilius haberi, si centro ipsorum invento, (per Consect. 6. Def. VIII.) ex ipso ductis rectis CB, CA &c. (*Fig.* 32.) triangula fiant totidem ACB, ACF &c. quot figura habet latera. Cùm enim hæc omnia bases AB, BF, tanquam chordas, & altitudines CD, CG, tanquam sagittarum DE & GH residua, habeant æquales per Consect. 1. Def. X. & consequenter, vi Conf. 5. Def. XII. ipsa sint æqualia; unius area inventa multiplicatur per laterum numerum, aut altitudo dimidia per laterum omnium summam, & habetur area totius polygoni: quando-


33.
Pag. 36.
n. I.
n. II.
n. III.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
n. 1
n. 2

Scholion.

NOn incongruum autem fuerit hoc loco de figurarum saltem regularium inscriptione in circulo, hæc paucula breviter annotâsse:

1. Descripto circulo semidiametro AC quacunque, (a) (Fig. 33. n. 1.) hanc ipsam in circumferentia precisè sextam partem AB rescindere, atque adeò latus esse hexagoni regularis: quandoquidem hoc pacto △ ABC fit æquilaterum, & consequenter angulus ACB & arcus AB 60 graduum, per Conf. 1. Def. XIII.

2. Hinc omisso uno divisionis puncto B, (b) ad alterum D, educta recta AD dat latus trianguli regularis circulo inscripti, utpote subtendens bis 60 sive 120 gradûs.

3. Si Circuli diametri AD, DE (n. 2.) se mutuò secuerint ad angulos rectos in centro C, rectas AB, BD &c. fore latera inscripti quadrati ABDE: Nam (c) latera AB, BD &c. sunt chordæ quadrantum æquales, & anguli ABD, BDE &c. recti omnes, utpote in semicirculo, (per Schol. 6. Def. X.) compositi ex binis semirectis per Consect. 2. Defin. XIII.

4. Pentagoni regularis inscriptionem quoque ingeniosè absolvit Euclides Lib. IV. Prop. 10. & 11. & quindecagoni Prop. 16. Verùm ut prius illud profundiùs haustum est, quàm ut hoc loco doceri possit; ita posterius (illo interim supposito) brevissimè sic consequetur: Dato circulo ex uno eo-

C 3 dem-

(a) Euclid. Prop. 15. Lib. IV.
(b) Ejusd. Coroll. 2.
(c) Euclid. 6. Lib. IV.

demque puncto A (n. 3.) inscribatur, & Pentagonum regulare AEFGHA, & triangulum regulare ABC; eritque BF latus quindecagoni. Nam duo arcûs AE & EF simul faciunt 144°, AB verò 120°: (a) Ergo differentia BF erit 24°, quæ est pars decima quinta circumferentiæ.

5. Egregium verò prorsus fuerit, siquidem ritè demonstrari possit (uti factum in lib. de circulo confidit) hoc CAROLI RENALDINI inventum, quod regulam universalissimam, circuli peripheriam in quotcunque partes æquales dividendi, & sic polygona regularia quævis inscribendi, nobis tradit, ex ejus Lib. II. de Resol. & Comp. Mathem. p. 367 à nobis breviùs ita conceptam: Super Circuli dati diametro AB (*Fig. 34.*) fiat triangulum Æquilaterum ABD, ac divisâ diametro AB in tot partes æquales, quot laterum est futura figura inscribenda duabusque (v. g. à B versus A) prætermissis, ducatur per initium tertiæ ex D recta ad oppositam cavam circumferentiam, indeque recta alia ad terminum diametri B, quem duæ partes prætermissæ attingunt. Sic e. g. pro Trigono divisâ AB in partes æquales tres, si prætermissis duabus B 2, per hoc initium tertiæ ducatur recta D III, & inde recta III. B, hæc erit latus trigoni: Sic IV. B latus quadrati, V. B. latus Pentagoni &c.

NB. *Horum autem demonstrationem* (subjungit Renaldinus p. 368.) *pluribus in Lib. nostro de Circulo prosecuti sumus: In hujus Problematis effectione Seniores Geometræ melioris notæ plurimùm insudârunt, ac in eadem recentiores non parum temporis oleum*

(a) Euclid. 16. Lib. IV.

oleum operamq; perdentes, insumpserunt: Unde laudis nonnihil, absit à verbo jactantia, nobis à posteritate sperandum.

DEFINITIO XVI.

SI planities aliqua parallelogramma AC (*Fig. 35.*) secundùm ductum rectæ cujusdam AE aut plani alterius AF deorsum v.g. ferri concipiatur motu sibi semper parallelo; intelligetur hoc pacto generari solidum sex planis oppositis parallelis, quæ bina saltem *inter* se æqualia sint, comprehensum, ideoq; *Parallelepipedum* appellatum; & speciatim *Cubus* sive Hexaëdrum κατ' ἐξοχὴν dictum, si parallelogrammum describens ABCD quadratum, linea dirigens AE hujus lateri æqualis & ad planum describens perpendicularis, & consequenter omnia sex plana parallela, hoc solidum comprehendentia (Græcis ἕδραι dici solita) inter se æqualia sint. Quod si planum describens (*Fig. 36.*) aut triangulum fuerit, aut polygonum, descripta ab ipsis solida peculiari nomine *Prismata* (quasi serrâ resectæ columnæ angulares;) si Circulus, *Cylindri* (columnæ rotundæ,) salutantur; Patet autem statim ex ipsa horum solidorum genesi quoad omnia simillima,

(Consectaria.)

1.

SI plana seu parallelogramma describentia (a) ABCD & abcd (*Fig. 37.*) æqualia sint, & lineæ dirigentes seu motûs intervalla AE & ae, pariter æqualia; descripta inde solida parallelepipeda, cylindros & Prismata (hoc pacto æqualium basium & altitudinum futura) inter se æqualia esse; siquidem indivisibile describens nullibi concipietur in uno, quin ipsi respondeat æquale & eodem positu in altero, prorsus ut in parallelogrammis superiùs ostendimus: Consequenter igitur

2. Parallelepipedum quodcunque (b) à plano diagonali BDHF in duo prismata prorsus æqualia dividi; siquidem, vi Conf. 3. Def. XII. Triangula ABD & BCD æqualia sunt & hæc per æqualia spatia æqualiter mota supponuntur.

3. Et cùm in Cubis ac Parallelepipedis rectangulis manifestum sit, vi hujus ipsius geneseos, si basis ABCD (*Fig. 38.*) in areolas suas quadratas divisa per altitudinem AE mensurâ longitudinariâ congenere divisam ducatur, hoc pacto totidem cubulos æquales in toto illo solido unà genitos concipi, quot unitates numerus areolarum baseos in numerum divisi lateris AE multiplicatus producit; etiam aliorum parallelepipedorum non rectangulorum

(a) Euclid. XI. p. 29. 30. 31.

(b) Euclid. XI. p. 28.

rum ſoliditatem haberi, ſi eorundem baſes & altitudines perpendiculares per ſe invicem multiplicentur.

4. Porrò verò, quia quodlibet prisma triangulare eſt parallelepipedi cujusdam dimidium, & quodlibet prisma multangulum in totidem triangularia reſolvi poteſt, quot habet baſis ipſius triangula; utrorumque ſoliditatem pariter obtineri, ſi baſis prismatis, ſive triangularis ſive multangularis in ejusdem altitudinem perpendicularem multiplicetur.

5. Eodemque adeò modo cylindri quoque ſoliditatem haberi, utpote qui prismatis innumerorum angulorum loco haberi poteſt, uti Circulus loco Polygoni infinitorum laterum.

Definitio XVII.

SI Triangulum aliquod ABC (*Fig.* 39. *n.* 1.) uno ſuo angulo plano A ex apice anguli cujusdam ſolidi (à duobus planis aAb, & cAa in communi linea Aa conjunctis determinati) moveri concipiatur, motu ſemper ſibi parallelo, ita quidem ut extremo puncto A angulari lineæ Aa perpetuo inhæreat, lateribus verò ſuis AB & AC duo plana angularia aAb & cAa perpetuò ſtringat, donec tandem in abc totum intra ſolidum angulum cadat; deſcribet hoc ſuo motu, tum intra ſolidum angulum figuram *Pyramidalem* dictam, cu-

jus basis sit triangulum a b c, vertex autem A, tum extra illum aliam pyramidem quadrangularem, cujus idem sit & communis vertex A, basis autem quadrangulum C b; à trianguli mobilis latere B C descriptum: Et priorem quidem describet partibus sui triangularibus à puncto A deinceps continuè crescentibus α β γ, in ipsum △ a b c tandem desinentibus; posteriorem autem partibus residuis à toto A B C deinceps continuè decrescentibus & quadrangulis trapeziis β γ δ ε, in lineam rectam b c tandem desinentibus: Sicut interim se toto idem triangulum A B C describit juxta superiùsdicta Triangulare prisma, ex duabus istis pyramidibus compositum. Patebit autem ex hac Pyramidum genesi attendentibus facilè,

(Consectaria)

I.

Qualiacunq; fuerint triangula describentia ABC, & 𝔄𝔅ℭ (n.2.) modo sint æqualia, & qualescunque fuerint anguli solidi planis a b A & a c A, 𝔞𝔟𝔄 & 𝔞𝔠𝔄 comprehensi, modo sint angulis planis A & 𝔄 accommodati, & tales, ut per æquale intervallum motus à linea A C ad a c, & à linea 𝔄ℭ ad 𝔞𝔠 intra ipsos delata triangula describentia a b c & 𝔞𝔟𝔠 eodem momento tota intra eosdem reci-

pian-

piantur; quoniam elementa continuò crescentia numero æqualia utrobique necessariò concipiuntur, & ultima a b c & a b c per hypoth. æqualia sunt; etiam summas omnium utrobique æquales esse, eademque adeò necessitate & æquales pyramides triangulares a b c A & a b c 𝔄 intra solidos angulos, & æquales pyramides quadrangulares b c C B A & b c ℭ 𝔅 𝔄 extra hos describi, quâ prismata tota vi Consect. 1. Defin. præced. æqualia describuntur: atque ita pyramides etiam æqualium basium & altitudinum pro æqualibus indubiè habendas esse.

2. *Sectionem* transversalem prismatis non (*a*) producere partes æquales ut in parallelogrammis, sed pyramidem quadrangularem c b B C A (*Fig.* 40.) esse præcisè duplam alterius pyramidis triangularis a b c A. Ductâ enim diagonali b C, illa in duas pyramides triangulares b B C A & b c C A resoluta concipietur, quæ verticem A communem, & bases triangulas æquales habent, & per præc. ipsæ quoque æquales sunt. Sed harum altera b B C A vel A B C b (si sc. A B C pro basi & b pro vertice sumamus) manifestò æqualis est triangulari primæ a b c A, ex eodem fundamento, quòd bases A B C & a b c æquales, communemque prismatis sui altitudinem A a, vel B b habeant.

3. Ergo Pyramis quælibet est pars tertia (*b*) prismatis eandem cum illa vel æqualem basin haben-

(*a*) Prop. 7. Lib. XII. Euclid.

(*b*) Ejusd. Prop. Schol.

habentis, eandemque altitudinem. De prismate triangulari jam certa res est ex Consect. præced. De cæteris verò ideò evidens, quod illa resolvi in triangularia possint, quibus singulis respondeat sua triangularis pyramis, tanquam pars tertia.

4. Et cùm Conus haberi pro pyramide (a) infinitorum laterum, pariterque cylindrus pro prismate infinitangulo possit; Conus etiam erit pars tertia cylindri super eadem vel æquali basi & ejusdem altitudinis.

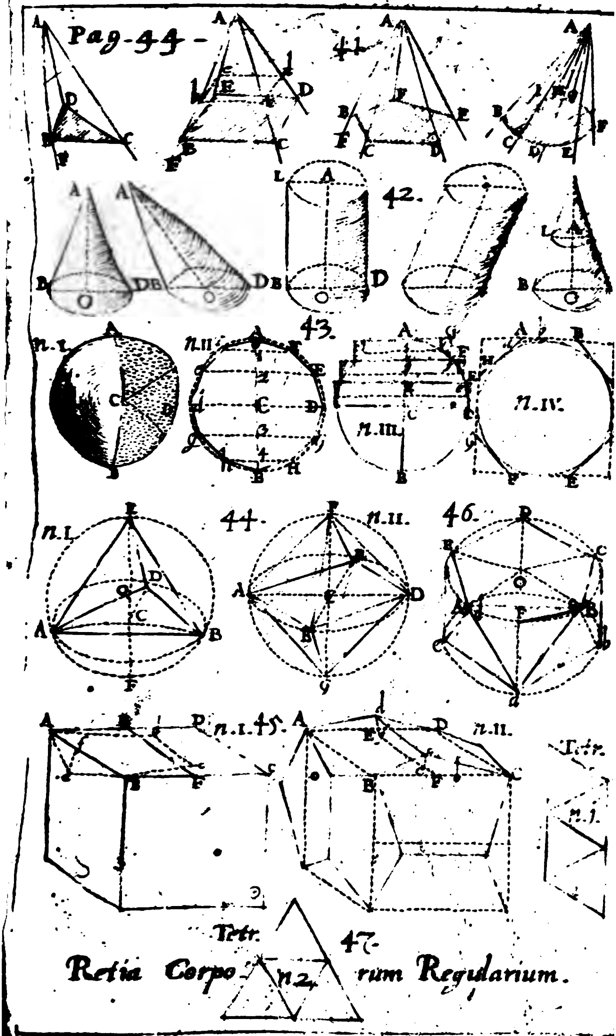
Scholion.

Habemus ergo nunc universæ Stereometriæ practicæ præcipua fundamenta, ex quibus etiam irregularium corporum dimensio pendet, imò & globi sive sphæræ, prout è sequentibus distinctiùs apparebit.

Definitio XVIII.

Suppetit autem & alia multò facilior Pyramidum Conorumque genesis, sed quæ ad superficiei, non ad soliditatis dimensionem conducat. Nimirum, si extra planum aliquod angulare acceptum fuerit punctum fixum A (*Fig.* 41.) & in hoc fixa linea recta AF concipiatur moveri juxta latera BC, CD &c. in orbem; hæc suo motu describet totidem triangula BAC, CAD &c. quot latera habet angulare planum.

(a) Prop. 10. Lib. XII.



Retia Corporum Regularium.

num. Et hæc triangula ad unum punctum A constituta comprehendent solidum, quod *Pyramis* appellari solet. Quod si loco plani angularis circulare supponatur (tanquam angulare infinitorum laterum) solidum inde productum *Conus* vocatur, cujus superficies infinitis æquatur triangulis super basi BCDE constituendis, & qui consequenter suâ soliditate adæquet pyramidem infinitangulam ejusdem altitudinis. Eodem verò modo per motum lineæ AF sibi semper parallelum circa plana vel parallelogramma vel triangularia & multangula, vel denique circulos, Parallelepepida, Prismata & Cylindros designabit. Quemadmodum autem una Pyramis erectior alterâ prodit, prout punctum A plano BCD &c. (*Fig. 42.*) rectiùs imminet aut obliquè magis illud respicit: ita speciatim *Conus* alius *rectus* appellatur, ubi linea AO ad circularis plani centrum demissa (aliàs Axis coni dicta) angulos rectos ubique constituit; *Scalenus* vel *obliquus*, cùm axis ad basin obliquus est. Quæ quidem distinctio ad cylindros quoque dum applicatur, insimul intelligi facilè potest, & Rectum Conum & Rectum Cylindrum aliter etiam gigni, si ibi triangulum, hîc parallelogrammum rectangulum AOB & LAOB cir-

ca lineam AO immotam (cui inde nomen Axis) in orbem moveri concipiatur; & Conum rectum truncatum, si trapezium rectangulum parallelarum basium &c. Cæterùm uti soliditas horum corporum è superiore genesi deducta est; ita superficies ipsorum externa, imò & prismatum & parallelepipedorum ex præsenti facilè subducetur ab eo, qui ad seqq. attenderit.

Consectaria.

1.

Cùm tota superficies externa, præter basin, alicujus pyramidis nihil aliud sit, quàm complexûs totidem triangulorum, ABC, CAD &c. quot ipsa habet latera; si triangulorum areæ juxta Consect. 8. Defin. XII. separatim inventæ addantur in unam summam, prodire aream superficialem totius pyramidis.

2. Si Pyramis aliqua secetur plano b, c, d, e basi ejus BCDE parallelo, (*Vid. Fig. 41.*) superficiem truncatæ pyramidis planis parallelis interceptæ pariter haberi, si pyramidis resectæ Abcde superficies per Cons. 1. inventa subtrahatur à superficie pyramidis totius.

3. Pyramidis rectæ super basi polygona (*a*) regulari externam superficiem æquari triangulo, cujus altitudo æqualis est altitudini unius è componentibus illam triangulis, basis autem peripheriæ baseos universæ.

4. Ergo

(*a*) Archim. Lib. I. de Cono & Cyl. Prop. 7. & 8.

4. Ergo superficiem coni recti, vi supradictorum, æqualem esse triangulo, cujus altitudo est ipsum coni latus, basis autem æqualis circumferentiæ.

5. Coni recti truncati aut rectæ pyramidis truncatæ superficiem autem esse æqualem trapezio parallelarum basium, quarum ima imæ, suprema supremæ peripheriæ æquatur, altitudo verò portioni lateris vel altitudinis interceptæ: ut area superficialis in utroque casu sit determinatu facilis juxta Conf. 2. Def. XIV.

6. Superficiem Cylindri recti aut prismatis recti æqualem esse Parallelogrammo, quod habet eandem cum istis altitudinem & pro basi lineam rectam, peripheriæ cylindri vel prismatis æqualem.

Definitio XIX.

SI planum semicirculare ADB (*Fig. 43. n. I.*) circa diametrum AB fixam, tanquam circa axem volvi concipiatur in orbem, hoc ipso motu suo describet *Sphæram*, & semiperipheriâ suâ superficiem sphæricam, cujus omnia puncta ab axis puncto medio C (quod ideò Sphæræ descriptæ centrum appellatur) æqualiter ubique distabunt. Quod si (*n. II.*) ambitus hic (*a*) semicircularis ante revolutionem concipiatur divisus, primùm in duos quadrantes AD ac

(*a*) Archim. Lib. I. de Cono & Cyl. Prop. XXII. coroll. & prop. XXIII.

AD ac BD, deinde uterque pro lubitu in plures partes numero & magnitudine æquales, ductisque adeò chordis AF, FE, ED &c. figura polygona AFEDGHB semicirculo inscripta unà cum ipso circum axem AB dicto modo volvatur; describent hoc pacto A 1 F & B 4 F duos conos circa diametros Ff & Hh, trapezia verò interjecta circa axes 1, 2, 2 C, C 3, & 3 4 totidem truncatos conos, ac lineæ AF, FE &c. totidem conicas superficies, vi Defin. anteced. adeoque totum planum polygonum AFEDGHB corpus aliquod conicum Sphæræ inscriptum & meris conicis superficiebus terminatum. Tametsi verò tale corpus ipsâ Sphærâ ambiente minus, ac universam ejus superficiem ambientis Sphæræ superficie minorem esse, facilè pervideat attentior animus; is idem tamen hæc etiam eâdem facilitate deprehendet

Consectaria:

I.

Si arcûs AF, FE &c. porrò bisecti & polygona figura duplo plurium laterum semicirculo inscripta modoque memorato circumvoluta concipiatur, ortum inde corpus Pseudo-Conicum ad Sphæræ soliditatem, & illius superficiem ad superficiem hujus, multò jam propiùs accedere; atque adeò (dum hanc arcuum bisectionem

ctionem in infinitum quasi cogitando persequitur) omni jure inferet:

2. Sphæram quamlibet haberi posse pro tali corpore Pseudo-Conico infinitorum laterum, ejusque superficiem æquari superficiebus conicis infinitis ejusdem corporis; id quod hoc loco advertisse infrà juvabit.

Definitio XX.

Si plani semicircularis ADB, (*Fig. 43. n. III.*) diameter AB in partes aliquot æquales (ut hîc semidiameter AC in 3) divisa concipiatur, & super transversas parallelas CD, 2e, 1f parallelogramma circumscripta CE, 2E, 1G unà cum semicirculo ipsò circa fixum Axem AB revolvi cogitentur; evidens est, à semicirculo Sphæram, ut anteà, à circumscriptis parallelogrammis autem totidem cylindros circumscriptos æquealtos, gigni: bisectis autem omnibus his altitudinibus, & parallelogrammis duplo pluribus circumscriptis, duplo etiam plures cylindros altitudinis dimidiæ revolvendo gigni, sed qui tamen simul sumpti ad soliditatem & rotunditatem Sphæræ multò propiùs accedant, quàm illi pauciores (prout nempe etiam sex parallelogramma posteriora ad planum circuli propiùs accedunt, quàm illa tria priora;) adeoque tandem, si bisectio illa altitudi-

D num

num in infinitum continuari concipiantur, innumeros ejusmodi cylindros in ipsam Sphæram desinere. Quemadmodum etiam, si Sphæræ circumscriptum ponatur aliquod polyedrum, (quod hic per polygonum ABCD &c. *n. IV.* circulo circumscriptum quodammodo adumbratur) & hujus anguli solidi novis planis *a b* Sphæram tangentibus resecti; manifestum est oriturum inde aliud polyedrum ad Sphæræ soliditatem suâ soliditate, & ad Sphæræ superficiem suâ superficie, propiùs accedens priore, &, si hujus anguli similiter abscindantur, corporis novi soliditatem & superficiem ad Sphæræ soliditatem & superficiem adhuc propiùs accessurum &c. processuque adeò infinito in ipsam Sphæram Sphæræq; superficiem desiturum. Ut hinc omni jure inferantur hæc

Consectaria:

I.

SPhæram haberi posse pro polyedro innumerarum basium, h. e. ex pyramidibus innumeris in centro tanquam apice communi concurrentibus compositum, quarum adeò altitudo communis sit ipsa Sphæræ semidiameter, & basium omnium summa æqualis superficiei Sphæræ.

2. Si

2. Si haberi possit proportio inter cylindrum ejusdem altitudinis cum aliqua Sphæra & basin æqualem circulo Sphæræ maximo habentem, & inter cylindros innumeros modo memorato circumscriptos; etiam haberi proportionem inter dictum cylindrum circumscriptum unicum, & ipsam inscriptam Sphæram: quæ quidem hîc monuisse suo loco conducet.

Definitio XXI.

Restant *Corpora*, quæ vocantur, *Regularia*, figuris planis regularibus hactenus respondentia, quòd, ut illæ lineis angulisque æqualibus constant, ita hæc planis regularibus & æqualibus in angulos solidos æquales coëuntibus comprehendantur, & sicut illæ circulo, ita hæc Sphæræ sint inscriptibilia & circumscriptibilia. Verùm, uti planorum regularium infinitæ sunt species; ita corporum regularium non nisi quinque: primum sc. sub 4 triangulis æqualibus & æquilateris contentum, ideò *Tetraëdrum* appellatum; 2. Sex æqualibus quadratis terminatum inde *Hexaëdrum*, aliàs Cubus, dictum; 3. Octo triangulis æqualibus & æquilateris comprehensum, *Octaëdrum* ideò nuncupatum; Quartum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus definitum, ob idipsum *Dodecaëdrum* audiens; Quintum deniquesub viginti tri-

angulis regularibus & æqualibus contentum, *Icosaëdri* nomine exinde insignitum. Præter hæc quinque regularium corporum genera aliud dari non potest; siquidem è concursu trium æquilaterorum triangulorum potuit oriri angulus solidus tetraëdri, ex quatuor angulus solidus octaëdri, ex quinque angulus solidus Icosaêdri; è concursu trium quadratorum angulus solidus Hexaêdri; è concursu trium pentagonorum angulus solidus Dodecaêdri, quia sc. in his omnibus collectionibus angulorum planorum 4 rectorum mensura non attingitur. At enimverò quatuor quadrata, aut tria hexagona, in uno puncto concurrentia, faciunt præcisè 4 rectos & sic vi Consect. 2. Defin. VIII. planitiem, non angulum solidum, constituunt. Multò igitur minus tria heptagona, aut octogona, vel etiam 4 pentagona coire poterunt in angulum solidum ad corpus regulare novum constituendum; siquidem illi collecti 4 rectos etiam superant. Cæterùm dimensionem horum quinq; corporum regularium quod attinet

(Consectaria.)

I.

Cùm Tetraëdrum nihil aliud sit quàm pyramis triangula, & octaëdrum pyramis quadran-

drangula geminata; dimensio horum eadem est, quæ pyramidum ex Scholio Def. XVII.

2. Hexaëdri verò soliditas habetur juxta Conf. 3. Def. XVI.

3. Dodecaëdrum reverà constat ex duodecim pyramidibus quinquangularibus, Icosaëdrum autem ex 20 triangularibus, in centro Sphæræ circumscriptæ communem apicem, adeoque altitudines etiam, uti bases, æquales habentibus: ideoque soliditate unius Pyramidis inventâ, & per numerum basium (ibi 12, hîc 20) multiplicatâ, habetur soliditas totorum corporum.

Definitio XXII.

PRæter has Regularium corporum definitiones, similes quasdam ideas ex earum genesibus formare discemus, quales & facillimas & scopo nostro aptissimas fingendi nobis ansam præbet Honoratus Fabri cumprimis, in Synopsi Geometrica p. 149. seqq.

I. Concipiatur inscriptum circulo cuidam triangulum regulare A B D (*Fig. 44. n. I.*) cujus centrum sit C, ex quo ducti CA, CB, CD, radii concipiantur unà cum centro communi C sensim attollendo ita extendi, ut, puncto C perpendiculariter ascendente, tandem efficiant lineas EA, EB, ED, æquales tribus AB, BD, DA.

 Sic

Sic scilicet genitum erit aut definitum spatium 4 æqualibus & regularibus triangulis comprehensum, quod vocamus *Tetraëdrum*. Hinc verò facilè demonstrabimus infrà, quantitatem elevationis CE & proportionem diametri Sphæræ circumscribendæ EF ad partem residuam CF, rationemq; adeò geneseos Euclidis, quam proponit Lib. XIII. Prop. 13.

II. Similis huic erit, ac facilior etiam conceptu, hæc *Octaëdri* genesis, quâ per sublationem mentalem centri C (*Fig. 44. n. II.*) quadrati circulo inscripti ABDE unà cum semidiametris CA, CB, CD, CE, donec magis magisque extensæ evadant in lineas AF, BF, DF, EF, omnes inter se & lateri quadrati AB vel BD æquales; & per similem deorsum usq; ad G factam extensionem, octo triangula æqualia & regularia prodiisse manifestum erit, quæ in duobus punctis oppositis F & G quaterna concurrant. Possemus & aliam Octaëdri genesin ex certa Sphæræ sectione deducere, similemque *Hexaëdri* sive Cubi dare: sed hujus facillimam, parallelepipedis nempe communem, jam suprà habuimus, & illius modò data sufficere scopo nostro abundè potest.

III. *Do-*

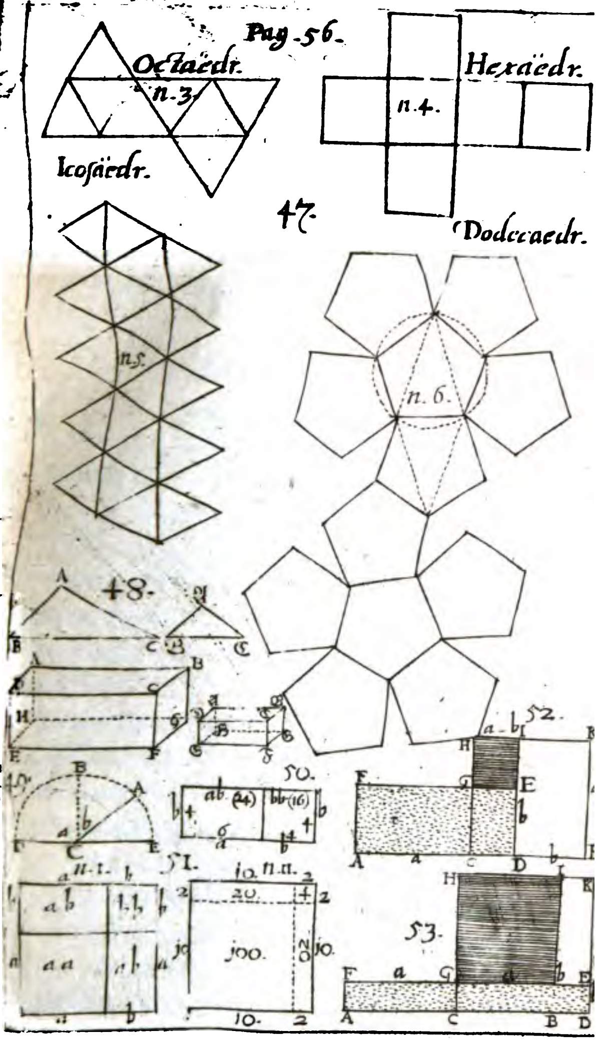
III. *Dodecaëdri* potiùs genesin, quam Honoratus reipsa cum Euclide communem habet, hoc modo facilitamus: Super latere cubi A B (*Fig. 45. n. I.*) statuantur aut concipiantur statui duo anguli e A B & e B A 36 grad. eritque angulus A e B 108 gr. angulus pentagoni. Fiant ex altera parte ejusdem lineæ A B anguli A B c & B A d 72 gr. & lineæ B c, A d æquales B e vel A e; junctâ c d, habebitur pentagonum regulare, duobus suis angulis A & B incumbens lateri cubi A B & ultrà medietatem ejus E F exporrectum, quamdiu superiori hedræ applicatum manet. Concipiatur autem jam in altera *Fig. n. II.* hoc Pentagonum circa lineam A B tanquam axem volubile interius elevari, donec latus ejus c d perpendiculariter immineat medietati cubi E F, aliudque ipsi prorsus æquale simileque ex altera parte similiter applicatum, & sic alia decem similia & æqualia super reliquis decem cubi lateribus; & erit imaginatu haut difficile, sic novum corpus cubo fore circumscriptum, 12 æqualibus regularibusque pentagonis comprehensum, quod aliàs *Dodecaëdrum* appellamus.

IV. *Icosaëdri* denique genesin cum Honorato sic facilè concipimus: Sit cylindrus

(*Fig. 46.*) altitudinem F a habens æqualem semidiametro baseos circularis A O, hujusque circumferentiæ inscriptum pentagonum regulare A B C D E; ducto B F latere decagoni demittatur F a perpendiculariter, & à puncto *a* facto initio, pentagonum aliud superiori prorsus simile & æquale in base inferiore descriptum ponatur: evidens erit, in cylindri ambitu junctis A a, B b, A e, B a &c. designari 10 triangula, quæ æquilatera esse & pentagoni latus A B singulis lateribus æquari infrà facilè demonstrabitur. Quod si jam imaginemur lineas OA, OB, OC, OD, OE, simul omnes à puncto O perpendiculari motu sublatas sensim extendi, donec æquales evadant lateri pentagoni A B, idemque in basi inferiore fieri concipiamus; habebimus supernè 5 alia, & infernè totidem triangula æquilatera, decem istis prioribus æqualia, atque adeò corpus sive spatium 20 triangulis æqualibus & regularibus inclusum, quod Icosaëdrum solemus appellare.

Scholion.

QUod si quis è spissiore charta quinque hæc corpora regularia mechanicè construere voluerit, sequentes Schematismos (*Fig. 47.*) ex planis regularibus & æqualibus compositos (quos corporum illorum


Octaëdr.
n.3.
Hexaëdr.
n.4.
Icosaëdr.
47.
Dodecaedr.
n.5.
n.6.
48.
50.
ab (24)
bb (16)
51.
n.11.
20.
100.
10.
52.
53.

lorum retia appellant) decenter complicet ac inter se conglutinet eo modo, qui per discursum fusiùs explicari poterit.

CAPUT II.

Eorum terminorum explicationes comprehendens, qui objecti affectiones exprimunt.

DEFINITIO XXIII.

OMne quantum aut *Finitum* dicitur, si certos habeat suæ quantitatis terminos; aut *Infinitum*, si nullos, vel *indefinitum* saltem, si determinatos fines non habuerit, aut sine his consideretur; prout Euclides frequenter supponit lineam infinitam, aut rectiùs fortè, indefinitam, h. e. sine ullo certo termino consideratam: similique distinctione, & reipsâ priori coincidente, quantum omne aut est *Mensurabile*; quod mensura quædam aliquoties repetita vel exactè metitur & adæquat (id quod Euclidi Geometrisque aliis *Metiri* κατ' ἐξοχὴν vocatur) vel etiam superat; aut *Immensum* contrà, cujus amplitudinem mensura finita nulla, quantumvis magna & perpetuò repetita, exhaurire potest: Et mensura quidem illa *pars aliquota* (Euclidi (*a*) *Pars* simpli-

(*a*) Lib. V. def. 1.

pliciter) mensurati dicitur in casu priore; sicut e. g. longitudo 1. ped. est pars aliquota longitudinis 10 pedd: in posteriore *pars aliquanta* (Euclidi (a) *Partes* præsertim in numeris) ut longitudo 4 vel trium pedum respectu longitudinis 10 pedd. Cæterùm, omissâ vexatissimâ illâ controversiâ, num detur magnitudo aliqua infinita aut numerus aliquis infinitus, hoc potiùs, quod utilitatis plus habet, hinc deducimus

Consectarium:

OMnem mensuram sive partem strictè sic dictam esse ad suum mensuratum, sive totum, ut unitas ad aliquem integrum numerum: siquidem illa (quæ una est) aliquotiès repetita (ecce numerum) hoc exactè metiri supponitur.

DEFINITIO XXIV.

QUod si duo diversa quanta eadem mensura metiatur (sive ipsa quoq; alterum alterius exacta mensura esse possint; sive non) hæc appellantur absolutè *Commensurabilia*; si nullam penitus communem mensuram admittant, *Incommensurabilia* salutantur: utraque interim ad invicem certam quantitatis habitudinem obtinent, quæ Ratio vel Proportio dici consue-

vit.

(a) Lib. VII. def. 4.

vit, uti postea pluribus audiemus. Habemus interim, ad quod, tanquam ad Lydium lapidem, exigere liceat ea, quæ mensuram communem admittunt, aut non admittunt, hoc

Consectarium:

Commensurabilia non esse, nisi, quorum (a) unum ad alterum sit, vel ut unitas ad numerum integrum, vel ut numerus integer ad alium integrum. Aut enim alterutrum est alterius, uti suiipsius, mensura, & tunc illud est ad hoc ut unitas ad numerum *per Consect. Def. praeced.* aut habent pro mensura communi tertium quippiam, quod ad utrumque seorsim est ut unitas ad aliquem numerum: ergo ipsa inter se sunt ut numerus ad numerum.

DEFINITIO XXV.

Quod si duo quanta ejusdem generis, tanquam sibi mutuò mensuræ, unâ sui applicatione se invicem exhauriant, (e. g. duo quadrata super eodem communi latere, aut duo ΔΔ quæ lineis & angulis & intercepto spatio congruunt) aut saltem à communi mensura totidem vicibus utrobique applicata pariter exhauriantur; (e. g. quadratum & oblongum, vel rhombus, vel triangulum, quorum singulæ

(a) Euclid. Lib. X. Prop. 5. 6. 7. 8.

gulæ areæ essent 20 pollicum quadratorum; tametsi lineis angulisque non convenirent) hæc *æqualia simpliciter*, illa non incommodè *totaliter æqualia* dicentur: Sin alterum excedat, alterum deficiat, *Inæqualia*, & excedens quidem *Majus*, deficiens verò *Minus*, & particula illa quâ minus à majori superatur, respectu majoris quidem *Excessus*, respectu minoris *Defectus*, communi nomine *Differentia*, vocari solet. Quæ omnia uti plana sunt & facilia; sic effata nobis pariunt magno numero per se fide digna, ideoque Axiomata dici solita, nempe hæc & similia.

Consectaria:

I.

TOtum esse majus qualibet suâ parte seorsim sumptâ, sive aliquota illa sit, sive aliquanta.

2. Quæ sunt æqualia eidem tertio, æqualia etiam inter se esse.

3. Quod uno æqualium majus est aut minus, etiam altero majus aut minus esse.

4. Quæ congruunt, hoc est aut reipsâ, aut mente solùm sibi mutuò applicata vel superimposita penitus coincidere debere evidenter intelliguntur; illa pro *totaliter-æqualibus* habenda esse: Et versâ vice

5. Totaliter-æqualia sibi mutuò congruere, &c.

&c. plurima, quibus ex parte jam in superioribus anticipando usi fuimus.

DEFINITIO XXVI.

Sunt porrò, non numerorum tantùm, sed quantorum omnium communes affectiones, *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio* & *Divisio*. Et *Additio* quidem est plurium quantorum (ejusdem præsertim generis) in unum totum collectio; id quod vel ita fit, ut hoc totum (quod *Summa* vel *Aggregatum* vocari solet) novo nomine indicetur, vel nudâ addendorum connexione per copulativam *Et* aut usitatum signum + (i.e. *Plus*:) Velut e.g. duo hi numeri ... & .... (h. e. 3 & 4) sibi invicem additi faciunt summam .... (h. e. 7. vel, quod eodem recidit, $3 + 4$;) & hæc linea ——— addita isti —————— facit summam —————————, quæ nihil aliud est, quàm prior & posterior linea simul sumptæ. Quod si ergo generaliùs de superioribus numeris, aut de hisce lineis, aut de duobus quibuscunque quantis addendis aliis, velimus loqui; prius appellando *a*, posterius *b*, summam aptissimè dicemus $a + b$.

Scholion.

QUemadmodum autem explicato sic Additionis termino per se patent hæc & similia axiomata: *Si æqualibus addantur æqualia, summas fore æquales; sin æqualia inæqualibus jungantur, aggregata fore inæqualia &c.* ita circa numerorum additionem in specie, duo præcipuè non inutiliter monebuntur tyrones. Primum hoc est: In additionis quoque negotio elucere commoditatem tam stupendi, quàm familiaris nunc, inventi de quo Defin. III. diximus; quandoquidem in unam summam colligere hoc artificio liceat, non decades solùm & centenarios, sed millenarios, myriades, milliones &c. tanquam nihil aliud quàm unitates essent; id quod exemplo per discursum est illustrandum. Alterum hoc: In Tetractys Weigeliana, salvo hoc eodem artificio, eatenus esse faciliorem numerorum additionem, quatenus ultra quaternarium hîc nunquam proceditur, & ipsæ notæ addendæ singulæ infrà quaternarium subsistunt, h. e. non aliæ quàm 1 & 2, vel 1 & 3, vel 2 & 3, vel 3 & 3 colligendæ unquam sint; cùm in vulgari additione nunc 7 & 9, nunc 8 & 6 &c. copulandæ veniant, quod esse difficilius experientia quoque comprobat. Ut hujus Additionis tetracticæ ratio magis constet, uno eam exemplo paulò prolixiore hîc illustrare juvabit. Sint igitur addendi hi numeri more solito sub invicem scripti:

Inci-

Incipiendo igitur à dextris in perpendiculo primo, connumero ibi quaternarios quot potero, & subscriptis, quæ restant, unitatibus (ut hîc 2) quaterniones inventos, si pauciores sint quàm quatuor subsequenti perpendiculo totidem Punctis designo; sin quatuor, aut bis quatuor &c. totidem puncta sub loco tertio noto: Et hac lege ubique progrediendo, tandemque suffixa puncta cum numeris subscriptis, tanquam aggregata partialia, eodem modo connumerando habebo summam desideratam.

	1	2	3.	0	2
		2.	3.	2	1.
		1	2	3.	3
	3.	2	1	3.	2.
		2.	0	3	3.
		1	2.	1.	1
		3.	2	1	1
		3.	3.	2	2.
	2	3	1.	0	3
3	2	3	1	3	2
3	0	0	1	3	2

NB. more Weigel.

NB. 1. Potest & eadem summa magis immediatè haberi, quaterniones inventos, si pauciores sint quàm quatuor sequentis perpendiculi unitatibus statim adnumerando; sin quatuor aut bis quatuor, totidem interim puncta sub perpendiculo tertio notando, postmodum ejus unitatibus (ubi eò perventum fuerit) similiter annumerandas &c.

NB. 2. Proba per abjectionem ternarii, uti vulgò novenarii, rursum facilior.

Definitio XXVII.

Subtractio est quanti unius ab altero (ejusdem præsertim generis) ablatio; id quod vel ita fit, ut *Residuum* vel *Differentia* novo

novo & peculiari nomine indicetur, vel nudâ subtrahendi sejunctione per privativam particulam *sine*, aut usitatum signum — (i. e. minus:) velut e. g. ternario . . . (sive 3) è septenario . . . . (h. e. 7) sublato, residuum vel differentia est quaternarius, ... (sive 4;) & hac lineâ ——— sublatâ ex illa ——————————, restat ista ——————, h. e. posterior priore privata. Quod si ergò generaliùs iterum de his lineis, aut superioribus numeris, aut duobus quibuscunque quantis, subtrahendis loqui velimus, prius, è quo subtrahendum, ubique *a*, posterius, quod subtrahendum, *b* appellando, residuum aptissimè dicemus $a-b$. Quemadmodum hîc etiam suâ luce radiant hæc & similia axiomata: *Si ab æqualibus æqualia subtrahantur, residua sive differentias fore æquales; &, si ab inæqualibus æqualia demas, residua fore inæqualia &c.* Sic inprimis adnotari merentur hæc duarum præcedd. definitt.

Consectaria:

I.

SI privativum addatur suo positivo (-3 ad $+3$ vel a ad $+a$) summam esse 0; cùm privationem sive defectum addere nihil aliud sit, quàm positivum tollere, adeoque positivum

vum cum privativo jungi, sit alterum cum altero evanescere.

2. Si privativum subtrahatur à suo positivo (—a ex +a) residuum esse positivi duplum (+2a) cùm subtrahere vel tollere privationem, sit rem ipsam ponere; scilicet quæ privativi *additio* verbis dicitur, reverà est ablatio quædam, & ejusdem dicta *subtractio* realiter est additio; quodque hîc dicitur *residuum*, est reipsà aggregatum, & quod ibi *Summa* vocatur, est reverà residuum. Sic

3. Si positivum (+a) auferatur à privativo (—a) residuum est privativi duplum (—2a;) cùm positivo ablato nova oriatur privatio, quæ alteram jam datam necessariò geminat. Hinc

4. Origo regularum vulgarium in additione & subtractione literali: *Si signa quantorum inæqualium sint diversa, loco additionis subtrahitur, loco subtractionis additur, eiq; quod provenit, præfigitur signum, ibi majoris, hîc ejus à quo subtrahendum erat: sin eadem signa fuerint, & majus à minore subtrahendum veniat, subtrahitur contrà ratione naturali minus ex majore, & residuo præfigitur signum contrarium:* Quas equidem regulas exempla subjecta declarabunt.

Additionis.	*Subtractionis.*	
4b — 2a	Ex 2a + b	Ex 3a + 2b
3b + 5a	Subtr. a — b	Subtr. 2a + 3b
7b + 3a	Resid. a + 2b	Resid. a — b.

Scho-

Scholion.

SC. in hac literali ſubtractione non habemus illam commoditatem, quam inventum notarum vulgarium ſuppeditat, ut ex proximè antecedente nota mutuò ſumatur unitas, quæ in ſerie ſequente valet 10 &c. Habetur ea tamen in ſubtractione tetracticâ, hoc ſolo diſcrimine, quòd mutuò ſumpta unitas hîc valeat tantùm quatuor. Ut facilitas hujus operationis elucеſcat, exemplum adjiciemus unicum, in quo v. g. ex hoc numero, ſubtrahendus ſit ille: Ubicunq; igitur inferior nota eſt minor ſuperiore, palpabilis eſt facilitas, multò hîc major quàm in vulgari ſubtractione; quia nunquam major numerus quàm 3. nunquam ex majore quàm ex quatuor & duobus veniet ſubtrahendus: Sin inferior ſuperiore major ſit, aſſumitur à ſiniſtris mutuò unitas, quæ valet quatuor, & cætera fiunt ut in communi ſubtractione, cyphris hîc intermediis, poſt mutuationem, 3 unitatibus (ut aliàs 9) æquivalentibus.

	1 2 3 2 0 0 2 3 1 0 2 3 2
	3 2 1 0 1 2 3 2 1 2 2 3
	3 1 0 3 2 3 3 2 3 0 0 3.

DEFINITIO XXVIII.

MUltiplicatio generatim loquendo nihil aliud eſt quàm ejuſdem rei multiplex additio ſeu accumulatio, in qua totum illud, quod provenit, peculiari nomine *Factum* ſeu *Productum*, ea verò, quorum interventu provenit, *Facientia* ſive *Termini efficientes* appellantur. In numeris autem

tem specialiter alter terminus, qui sibi sæpiùs addi debet, *Multiplicandus*, alter, quoties ille addi sibi debeat; indicans *Multiplicans* vocari solet; etsi eosdem terminos generaliter ad linearum aliorumque quantorum compositiones multiplices applicare nihil in Mathesi novi est. Sunt autem duo hîc præcipuè notanda: 1. Numeri per numerum vel lineæ per lineam multiplicationem eventu quasi duplici solere absolvi; ita sc. ut productum vel ejusdem sit generis vel diversi. E. g. cùm .:.: (4) multiplicatur per ... (3) productum (12) concipitur factum vel secundùm lineam h. m: .... vel secundùm superficiem aut in forma plana, hac sc. .:.:.:, unde numerus quoque planus appellari solet, & factus concipitur ex motu sive ductu erecti quasi ternarii A B per jacentem (ut ita loquar) quaternarium B C. Ita linearum quoque (e. g. lineæ A ——— B per lineam B ——————— C) multiplicatio vel ita concipitur fieri, ut productum quoque sit linea e. g. C ——————————— D (qua de multiplicatione per totam Geometriam utilissimâ suo loco plura erunt dicenda;) vel ita, ut productum sit planum, sive superficies, orta quasi ex ductu erectæ A B per jacentem B C, prout jam suprà

indicatum est. Sicut autem hujusmodi producta plana communiter *rectangula* dicuntur, si efficientes sint inæquales, *quadrata* verò (aliàs quantorum datorum *Potentiæ* sive *Potestates* dicta) si æquales; & hoc casu efficiens quodvis *Radix quadrata*: ita si plana iterum in efficiens tertium (in lineam puta vel tertium numerum) ducantur, oriuntur *solida*, & speciatim, si tertium sit ipsa quadrati radix, oritur *Cubus* &c. Alterum est: Utrumque istum vel numeros vel lineas &c. multiplicandi modum in Mathesi universali compendiosissima, & eâ quidem arbitrariâ, notatione indicari, nudâ sc. literarum, quæ has illasve quantitatum species designant, juxtapositione; ut e. g. si pro superiori numero vel lineâ AB ponatur *a*, & pro BC *b*, *Productum* seu *Factum* sit *ab*; aut, si efficientes sint æquales, *a* & *a*, quadratum inde factum sit *aa* vel a^2; & si hoc quadratum porrò per suam radicem *a* ducatur, ortus inde Cubus sit *aaa* sive breviùs a^3 &c. Quibus interjectis, evidentissima jam erunt seqq.

Consectaria:

I.

SI positivum multiplicatur per positivum, factum etiam esse positivum, cùm multiplicare si

re sit rem repetere ad præscriptum multiplicantis; adeoque multiplicare per positivum sit rem positivè repetere; quemadmodum econtrà per privativum multiplicare est rei privationem repetere; id quod infrà magis patebit.

2. Æqualia (*a* & *a*) in idem (*b*) ducta, aut contrà, dare facta seu producta (*ab* & *ab* vel *ba*) æqualia.

3. Idem (z) in totum (a + b + c) aut in (*a*) omnes illius totius partes, a, b, c, sensim ductum, dat facta seu producta æqualia. Similiterque

4. Totum (a + b) sive in seipsum ducatur, (*b*) sive in omnes suas partes (a, b) seorsim, dat facta seu producta æqualia.

Scholion 1.

Nititur his duobus ultimis consectariis praxis multiplicandorum numerorum vulgaris, quâ, v. g. 126 per 3 multiplicaturus, multiplico per 3 primò 6, secundò 2 (i. e. 20) ac tertiò 1 (i. e. 100), singulaque producta partialia postmodum in unam summam addo; similiterque multiplicaturus 348 per 23, per singulas multiplicandi notas duco primam multiplicantis 3, deinde per easdem illas etiam secundam hujus 2 (i. e. 20) &c. Quod idem eodem modo, ex eodem fundamento, fit in multiplicatione tetractica; nisi quod majoris facilitatis ergo nihil in mente reservatur, sed omnia scribuntur (quod in vulgari quoque multiplicatione fieri pos-

(*a*) Euclid. Lib. II. Prop. 1.
(*b*) Lib. II. Prop. 2.

possit,) velut ex hoc uno exemplo, quod subjicimus, videre, & insimul ingentem facilitatem hujus multiplicationis tetracticæ, præ vulgari, ex eo æstimare licet, quod abaco (das einmal Eins vulgo dicto) non indigeamus prolixiore eo, qui supra p. 7. habetur.

```
        3 2 1 0 3 2
              1 2 3
    ---------------
      2 1 2 3 2 1 2
      1 1 2 1 0 1
    1 2 0   0 1 0
    3 2 1 0 3 2
              2
  -----------------
  1 2 0 0 2 0 3 2 2
```

Scholion 2.

MAnifestum etiam ex dictis est,

1. Si basis alicujus parallelogrammi dicatur b & altitudo a, ejus aream rectè & commodè exprimi per productum ab, vi Consect. 7. Defin. XII.

2. Si basis alicujus △ sit b vel eb, & altitudo a ejus aream fore $\frac{1}{2}$ ab vel $\frac{1}{2}$ eab. per Consect. 8. ejusd. Def.

3. Si basis alicujus prismatis aut parallelepipedi aut pyramidis sit $\frac{1}{2}$ ab vel ab & altitudo c; soliditatem illius prismatis fore $\frac{1}{2}$ abc, hujus parallelepipedi abc, per Consect. 3 & 4. Def. XVI. Pyramidis autem $\frac{1}{6}$ abc vel $\frac{1}{3}$ abc per Consect. 3. Defin. XVII.

DEFI-

DEFINITIO XXIX.

DIvisio generatim loquendo est multiplex unius (quod *Metiens*, *Dividens* aut *Divisor* audit) ex altero (quod *Dividendum* seu *Metiendum* vocamus) subtractio, cujus multiplicitatem, quoties sc. facta sit, alia quantitas emergens indicat, inde *Quotiens* vel *Quotus* appellata. Est autem hîc etiam *Dividendum* cum *Dividente* vel ejusdem, vel diversi generis; Ejusdem e.g. si suprà productus numerus .... (12) dividatur per ... (3) ut inde proveniat quotus .... (4) aut divisâ superiùs inventâ lineâ CD per lineam AB redeat iterum linea BC: Diversi autem, si numerus planus suprà inventus :::: aut rectangulum AB CD dividantur per retroductionem quasi lateris erecti AB, ut maneat latus jacens BC. Utrumque verò dividendi genus, ut in Arithmetica & Geometria peculiares suas difficultates habet, suo loco enodandas; ita universaliter per literas (quatenus ad præsentem scopum sufficere potest) facillimè conficitur, vel nudâ separatione dividentis ex dividendo, si actu ab eo includatur; vel ejusdem divisoris sub dividendo per interjectam lineolam collocatione. Etenim, si *ab* dividatur per *b*, quotus est *a*; si per *a*, quotus est *b*. Quod

si verò a vel ab sit dividendum per c (quæ litera cùm inter istas non reperiatur, sejungi quoque non potest) quoti sunt $\frac{a}{c}$ & $\frac{ab}{c}$, h. e. a vel ab divisum per c, eodem modo, quo 2 divisuri per 3 (cùm hic divisor in dividendo non contineatur) quotum solemus interjectâ lineolâ designare $\frac{2}{3}$, h. e. 2 divisus per 3.

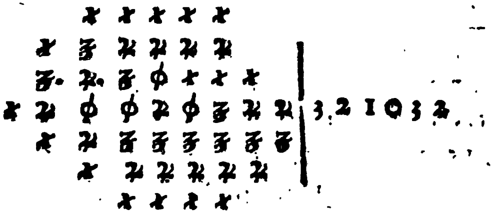
Scholion.

VUlgaris numerorum divisio, præsertim majorum per majores, quàm difficilis sit & laboriosa, in vulgus notum est: quàm facilis contrà in supputatione tetractica, vel unico exemplo hîc docuisse juvabit. Quod si ergo productum in Schol. 1. Defin. præced. inventum 1200 203 22, sit iterum dividendum per multiplicantem 123, fiet id vel usitato modo, etsi miris modis faciliùs, prout operatio inferiùs expressa ostendit; vel secundùm Weigelii peculiarem regulam, divisorem & ejus duplum, itemq; triplum, in Schedula quadam seorsim hoc modo scribendo:

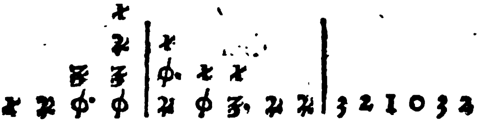
123.	312	1101
Divisor.	Dupl.	Triplum.

& postmodum Schedulam ad dividendum admovendo, ut videas, quisnam ex istis tribus, sinistimis dividendi notis congruat: is enim nudè subtractus, residuum dabit, & quotum post lunulam scribendum loci sui numero designabit, prout operatio

tio ipsa promptiùs quàm verborum prolixitas docebit.



Weigeliano modo sic:



DEFINITIO XXX.

Extractio Radicum est Divisionis quædam species, in qua quotus est quadrati vel cubi dati quæsita radix, divisor autem non datus, nec unus, (ut aliàs in divisione) sed ante inveniendus & multiplex. Equidem uti simplicium numerorum 1, 2, 3, &c. quadrati, 1, 4, 9, 16 &c. & cubi 1, 8, 27, 64 &c. ex abaco Pythagorico noti sunt, horumque vicissim radices ex eodem absque ulla artis regula innotescunt, similiterque radix extrahenda è quadrato *aa* vel a^2 aut è cubo *aaa* vel a^3, est sine dubio *a*: ita, si radix quadrata extrahenda sit ex *de*,

vel cubica ex *f g m* (quia literæ diversæ sunt & nulla pro radice sumi potest) solemus quadratam radicem notare hoc signo $\sqrt{de}$, Cubicam verò illam $\sqrt{C. fgm}$ &c. prout etiam in numeris non perfectè quadratis (quales sunt e.g. 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 15, 17, 19 &c.) radicem quadratam exprimere aliter non possumus, quàm hoc modo $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$ &c. & in non-perfectè Cubicis (ut sunt omnes inter 1, 8, 27, 64 &c. interjecti) radices Cubicas non nisi hac formâ exhibere licet, $\sqrt{C. 7}$ $\sqrt{C. 61}$ &c. quales equidem formas radicum in Arithmetica literali quantitates surdas, in *vulgari numeros surdos*, appellare solemus, h. e. tales, qui nullis notis numericis unquam perfectè determinari se patiantur; tametsi regulæ in promptu sint, quarum subsidio eas accuratè magis magisq; in infinitum determinare liceat. Hæ regulæ, verè quadratis & Cubicis numeris grandioribus pariter accommodatæ, & altiùs aliàs erui solitæ, ultrò sese offerent ei, qui radicem duabus literis expressam, v. g. a + b primùm quadratè, dein cubicè multiplicaverit. Habebit enim, tanquam dictorum

Consectaria.

I.

ASsumptæ radicis quadratum, & Euclidis Prop. 4. Lib. II. & unà regulam generalem cujusque radicis quadratæ inveniendæ, omnia his notis paucis expressa:

$$aa + 2ab + bb.$$

2. Ejusdem radicis Cubum, Theorema quoddam novum, & unà regulam cujusque radicis cubicæ extrahendæ, paucis hisce signis comprehensa:

$$a^3 + 3aab + 3abb + b^3.$$

Scholion I.

I.

QUæ ut magis pateant, præsertim ad regulas extractionum quod attinet, considerandum est 1. quadrati inventi $aa + 2ab + bb$, radicem, jam ante nobis notam esse (assumseramus enim pro radice quantitatem $a + b$) adeòque hoc unum, nunc videndum esse, quo pacto per divisionem exactam hæc radix ex illo quadrato possit elici. Apparet autem statim, primam radicis notam a, prodire ex prima parte quadrati aa, & alteram b eliciendam esse ex residuo $2ab + bb$, adeòque sicut duæ sunt notæ radicis, ita quadratum esse distinguendum in duas quasi classes, quæ singulæ dent singulas radicis notas. Deinde manifestum est, primam radicis notam a haberi per extractionem radicis simplicem ex quadrato aa. Evidens est porrò si

rò si velim habere dividendo notam radicis alteram, residuæ classis partem proximè sequentem dividendam esse per 2a, quoti priùs inventi duplum, &, ne factâ hac divisione quidquam restet (habemus enim jam integram radicem a+b) more solito debere non solùm ex dividendo residuo subtrahi factum ex divisore & novo quoto, sed insuper ejusdem hujus novi quoti quadratum: Quæ quidem est ipsissima illa regula extrahendarum radicum quadratarum in Arithmeticis præscribi solita & exemplis numeralibus per discursum illustranda.

Similiter, si Cubi superiùs producti radicem jam notam a + b divisione exactâ tentemus iterum eruere, manifestum est intuenti, primam radicis notam a prodire ex prima parte Cubi, nempe ex a^3 & alteram b ex residuo $3aab + 3abb + b^3$ eliciendam esse, adeòque, sicut duæ sunt notæ radicis, ita Cubum propositum in duas quasi classes esse distinguendum, quæ singulæ dent singulas radicis notas. Deinde manifestum est, primam radicis notam a haberi per extractionem radicis simplicem ex Cubo a^3. Evidens est porrò si velim habere dividendo notam radicis alteram b, residuam partem proximè sequentem dividendam esse per 3aa, (quadrati sc. ex antecedente quoto triplum, sive quoti antecedentis triplum in ipsum quotum antecedentem denuò ductum,) &, ne factâ hac divisione quidquam restet (habemus enim jam integram radicem cubicam a+b) debere non solùm ex dividendo residuo more solito subtrahi factum divisoris in novum quotum (3aab) sed insuper factum ex quadrato novi quoti in triplum antecedentis quoti (3abb) ac præterea ejusdem novi quoti Cubum b^3.

Quæ

Quæ quidem est ipsissima illa regula extrahendarum radicum Cubicarum, quam Arithmetica vulgaris circa numeros nobis præscribit.

Scholion II.

PAtebit autem ex dictis facilè quoque ratio alterius regulæ Arithmeticæ, quæ radices numerorum non exactè quadratorum aut Cubicorum, verum propiùs propiusque docet eruere; augendo sc. numerum datum nova classe, quæ duabus cyphris sive nullis in quadrata, ex tribus in Cubica extractione constet, & operationem pro more continuando; ubi quidem id, quod ex hac continuatione primum provenit, priori radici integras unitates indicanti, partes decimas superaddit; quod in secunda, (si nova cyphrarum classis adjungatur) partes centesimas, & sic porrò in infinitum. Nam si v. g. ex 2 desiderem radicem quadratam prope verum; non potero aliam propiorem assignare integro numero, quàm 1. Addendo autem classem novam duarum 00, h. e. numerum datum multiplicando per 100 (quo ipso multiplicatur radix per 10) habebo 14, radicem ex 200 prope Verum, atque adeò $\frac{14}{10}$ sive $1\frac{4}{10}$ radicem ex 2 priore multò exactiorem; atq; ita semper exactiorem eruere possum in infinitum, exactissimam verò nunquam. Quod si enim ex 2, vel 3, vel 5 &c. posset aliquando radix exacta haberi, in tali sc. fractione, hanc ita comparatam esse necessum esset, ut ejus numeratore ac denominatore quadratè multiplicatis fractio inde orta æquivaleret præcisè 2, vel 3, vel 5 &c. h. e. ut ejus numerator esset denominatoris præcisè duplus, vel triplus, vel quadruplus &c. quod fieri non potest, quia uter-

que

que quadratus est, & in quadratorum serie tale quid nuspiam occurrit; immò hoc impossibile esse vel hinc elucet, quod denominator perpetuò est numerus rotundus, numerator non item. Ex quibus rectè intellectis porrò profluunt hæc

Consectaria:

3.

Certissimum incommensurabilitatis indicium esse, si quantitate una positâ 1, alterâ sit $\sqrt{2}$, vel $\sqrt{3}$ vel $\sqrt{5}$, &c.

4. Esse tamen hoc modo se habentes quantitates potentiâ saltem commensurabiles; h. e. earum quadrata saltem esse ut 1 & 2, sive ut numerus ad numerum.

5. Quæ verò se haberent ut 1 & $\sqrt{2}$, vel ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, illæ ne potentiâ quidem commensurabiles essent. Ex quibus rectè intellectis per nudam subsumptionem complures ex Lib. X. Euclidis Propositiones (a) patescent; præsertim ubi de ratione & proportione quædam præcognita fuerint.

Scholion III.

Cùm porro ex dictis facilè liceat conjicere, quantitati propositæ cuicumque, (quæ Euclidi *Rationalis* (b) dicitur, & pro qua semper ponere 1 possumus) plurimas alias commensurabiles, alias incom-

com-

(a) Lib. X. Prop. 9. 10. 11. 12. 13. &c.

(b) Euclid. Lib. X. def. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

commensurabiles esse, & utrasque quidem vel simpliciter vel etiam potentiâ tales; illæ quæ Rationali datæ commensurabiles sunt sive simpliciter, sive potentiâ tantùm, (quæ v.g. ad illam se habent ut 2, 3, 4 &c. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ &c. vel ut $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$ &c.) etiam *Rationales* vocantur: quæ verò incommensurabiles (ut $\sqrt{\overline{\overline{2}}}$, $\sqrt{\overline{\overline{\frac{1}{3}}}}$ &c.) utroque modo, *Irrationales*. Similiterque quadratum propositæ quantitatis rationalis (nempe 1) Rationale dicitur, & huic commensurabilia (ut 2, 3, 4, 5 &c. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c. □) etiam *rationalia*; incommensurabilia verò ($\sqrt{\overline{\overline{2}}}$, $\sqrt{\overline{\overline{5}}}$ &c.) *irrationalia*, & horum latera sive radices pariter, imò magis, *irrationales*.

Definitio XXXI.

Quævis interim quantitates ejusdem generis, sive commensurabiles fuerint sive incommensurabiles, sive æquales, sive inæquales, respectivam quandam habitudinem absolutæ suæ magnitudinis, eamque geminam, admittunt; quarum altera, ubi differentia tantùm vel solus excessus unius super alteram attenditur (e.g. quod 10 superet 7 ternario) *Respectus arithmeticus* sive *Ratio arithmetica* nominatur; altera, ubi amplitudo potius spectatur, quâ unum ab altero semel aut aliquoties comprehenditur (ut quòd ternarius in denario, ter con-

contineatur cum tertia insuper sui parte &c.) *Ratio geometrica* sive *Ratio κατ' ἐξοχὴν*, aliis etiam *Proportio*, dici solet. Et hæc quidem Ratio sive proportio, si minus in majore aliquoties exactè contineatur (uti 3 in 6, aut 4 in 12) generatim quidem *multiplex*, ex parte termini majoris & *submultiplex* ex parte minoris, speciatim in exemplo primo *Dupla* dicitur, cùm refertur 6 ad 3, *subdupla*, cùm 3 ad 6; in altero tripla & subtripla &c. Si minus in majore continetur vel semel, vel aliquoties, unitate tantùm superante (ut 3 in 4, aut 4 in 9) *Ratio* sive proportio vocatur generatim *superparticularis* & *subsuperparticularis*, enunciaturque vocabulo *sesqui* aut *subsesqui*, juncto nomine ordinali termini minoris; ita ut ratio 4 ad 3 dicatur *sesquitertia* & retrò *subsesquitertia*; ratio 9 ad 4 dupla sesquiquarta, & retrò subdupla subsesquiquarta &c. Si denique minus in majore contineatur aut semel aut aliquoties, pluribus unitatibus superantibus, appellatur generatim *Ratio* superpartiens, enunciaturque vocabulo *super* aut *subsuper*, cum nomine adverbiali partium superantium & ordinali termini minoris; ita ut e. g. ratio 7 ad 4 dicatur supertriquarta, 12 ad 5 dupla superbiquinta &c. Cæterùm,

terum, cùm quotiens ex divisione termini majoris per minorem oriundus, & iis ipsis vocabulis exprimi solitus, *Rationis nomen* communiter audiat (e. g. 2 nomen rationis 6 ad 3, 2¼ nomen rationis 9 ad 4, vel contrà &c.) vel etiam quotiens ex divisione consequentis per antecedentem prognatus (ut ½ in priore, $\frac{4}{9}$ in posteriore casu) per quod adeò nomen rationis antecedens terminus multiplicatus producit suum consequentem; evidens est, pro rationis cujuscunque nomine ponendo vel *e*, vel *i*, vel *o* &c. Si terminus antecedens dicatur *a* vel *b* &c. consequentem aptè vocari posse *e a* vel *e b*, *o a* vel *o b* &c. Et cùm in respectu Arithmetico solùm attendatur excessus prioris suprà posterius, vel posterioris suprà prius (qui liberè vocari potest *x* aut *z* &c.) si terminus antecedens (quem vel *a* vel *b* &c. licet appellare) sit minor, consequentem commodè dici posse $a+x$ vel $b+z$; sin major ille fuerit, hunc fore $a-x$ vel $b-z$.

Consectaria.

I.

PRomptum autem hinc est inferre, si diameter alicujus circuli ponatur *a*, circumferentiam appellari posse *ea*, (quæcunque enim inter eas fuerit ratio, illius nomen potest designari

gnari literâ *e*) & aream juxta Confect. 2. Def. XV. fore $\frac{1}{4}$ *eaa*.

2. Si pro basi alicujus cylindri vel coni ponatur $\frac{1}{4}$ *eaa* & altitudo *b*, soliditatem cylindri rectè vocari $\frac{1}{4}$ *eaab* per Confect. 5. Defin. XVI. & Coni $\frac{1}{12}$ *eaab* per Confect. 4. Defin. XVII.

Definitio XXXII.

Quemadmodum porrò plurium rationum geometricarum identitas *Proportio* vel *Proportionalitas Geometrica*, aut Proportio καθ' ἐξοχὴν, vocari solet; ita plurium respectuum Arithmeticorum similitudo, *Proportionalitas Arithmetica*, aut peculiari nomine *Progressio*, dici meretur; indeque *Progressionalia* vel *Arithmeticè-Proportionalia* audiunt, quæ bina eâdem differentiâ sese excedunt, sive *continuè* & absque interruptione, ut 2, 5, 8, 11, 14 &c. ascendendo, vel 30, 28, 26, 24, 22, 20 &c. descendendo; sive discretim & interruptè, ut 2 & 5, 7 & 10, 11 & 14 &c. ascendendo, vel 30 & 26, 24 & 20, 18 & 14 &c. descendendo: Pro quibus equidem, & omnibus aliis in quovis casu, universaliter supponere licebit, in progressione continua, v. g. a, $a + x$, $a + 2x$, $a + 3x$ &c. ascendendo, vel a, $a - x$, $a - 2x$, $a - 3x$ &c. descendendo; in progressio-

ne

ne discreta verò v.g. *b* & *b* † *z*, *c* & *c* † *z*, *d* ac *d* † *z* &c. ascendendo, vel *b* & *b* — *z*, *c* & *c* — *z*, *d* ac *d* — *z* &c. descendendo. Ex quibus ultrò profluit hoc

Consectarium.

DAtâ quacunque differentiâ plurimos posse inveniri progressionis terminos à primo aliquo sive assumpto sive dato continuè procedentes, vel plures antecedentes sive datos sive assumptos discretim consequentes; nimirum prioribus utrobique addendo vel subtrahendo differentiam datam, ut habeantur posteriores.

DEFINITIO XXXIII.

SImiliter autem, cùm eædem rationes dicantur, quæ habent idem rationis nomen, *Proportionalia* erunt, quæ per idem nomen rationis aut *continuè* ascendunt, ut 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c. vel descendunt, ut 81, 27, 9, 3, 1 (ibi sc. per nomen rationis 2, hîc per 3;) aut interruptè ac *discretim* vel ascendunt, ut 2, 4, 3, 6, 5, 10 &c. vel descendunt, ut 40, 10, 28, 7, 20, 5, 8, 2 &c. atque adeò

Consectaria.

I.

DAtis terminis duobus, aut uno saltem cum nomine rationis (e.g. termino 2, cum no-

mine rationis 3, aut universaliter termino primo *a* cum nomine rationis *e*) facilè fuerit invenire quotlibet alios proportionis sive Progressionis Geometricæ terminos; multiplicando nempe semper antecedentem per nomen rationis, ut proveniant, 2, 6, 18, 54 &c. vel *a*, *ea*, e^2a, e^3a &c. in continua, vel 2 & 6, 4, 12, 5, 15 &c. & *a ea*, *b eb*, *d ed* &c. in discreta proportione. Sic autem rectè intellectis, quæ hac 33. & superiore 31. deff. dicta sunt, hæc porrò instar axiomatum sponte suâ consequentur:

2. Quod æqualia ad idem (α) eandem rationem habeant, & idem ad æqualia.

3. Majus autem ad idem majorem (β) quàm minus, & idem ad minus majorem quàm ad majus.

4. Econtrà, quæ ad idem eandem (γ) habent, & ad quæ idem eandem, sint æqualia:

5. Quod verò ad idem majorem (δ) habet, majus; ad quod verò idem majorem habet, minus sit.

6. Rationes æquales uni tertiæ, (ε) sint etiam æquales inter se &c.

Definitio XXXIV.

Duo porrò hoc loco monenda restant: 1. illud, quòd, si totum aliquod ita

(α) Euclid. Lib. V. Prop. 7.
(β) Prop. 8.
(γ) Prop. 9.
(δ) Prop. 10.
(ε) Prop. 16.

secetur in duas partes inæquales, (α) ut totum, pars major, & pars minor sint in proportionalitate continua; id dicatur *Sectum extremâ & mediâ ratione:* 2. in serie continua ejusmodi proportionalium (e. g. 2, 4, 8, 16, 32 &c. vel *a*, *ea*, e^2a, e^3a, e^4a &c.) rationem primi termini ad tertium (β) (2 ad 8, vel *a* ad e^2a) speciatim appellari *duplicatam*, ad quartum (16, vel e^3a) verò *triplicatam* &c. ejus rationis quam habet idem primus ad secundum vel quilibet alius antecedens ejus seriei ad suum consequentem: generatim autem tum has duplicatas ac triplicatas &c. tum alias quascunque primi termini ad tertium vel quartum rationum continuè cohærentium (sive eædem sint, ut in superioribus exemplis, sive diversæ, ut in his 2, 4, 6, 18, vel *a*, *ea*, *eia*, *eioa* &c. si nempe nomen rationis primæ sit *e*, secundæ *i*, tertiæ *o* &c.) rationes inquam primi termini (2 vel *a*, ad tertium (6 vel *eia*) aut ad quartum (18 vel *eioa*) *compositas* dici ex interjectis continuè rationibus. Est autem ex ipso generali nostro exemplo manifestissimum, quod Euclides dicit,

(α) Euclid. def. 3. Lib. VI.
(β) Euclid. Lib. V. Def. 10.

(Consect. 1.)

Compositæ rationis nomen oriri ex multiplicatione nominum datarum simplicium (a) rationum; prout nomen rationis ex duabus compositæ (*a* sc. ad *eia*) prodit multiplicato nomine rationis primæ *e* per nomen rationis secundæ *i*, & nomen rationis ex tribus compositæ (*a* sc. ad *eioa*) prodit, multiplicato nomine rationis primæ *e*, per nomen rationis secundæ *i*, & horum producto porrò per nomen rationis tertiæ *o* &c.

Consect. 2.

Ut hoc pacto facillimum sit, datis quibuscunque rationibus, sive continuis (ut 2 ad 3 ad 6, vel *a*, *ea*, *eia*) sive discretis (ut 2 ad 3 & 5 ad 10, vel *a* ad *ea* & *b* ad *ib*) earum compositam exprimere: In primo casu enim statim habetur intermedii vel intermediorum terminorum nudâ omissione (2 ad 6 vel *a* ad *eia*;) in altero, multiplicando primum inter se nomina rationum componentium ($1\frac{1}{2}$ & 2, *e* & *i*) & per productum (3 vel *ei*) tanquam nomen rationis componens terminum primum (2 vel *a*) ut habeatur alter (6 vel *eia*) Aut (si quis malit in hoc secundo casu,) rationes discretas revocando priùs ad continuas, (faciendo sc. ut 5 ad 10 in ratione secunda, sic consequens primæ 3 ad 6, vel ut *b* ad *ib*, sic *ea* ad *eia*) & postmodum primum 2 ad hunc tertium

(a) Euclid. Lib. VI. def. 5.

tertium b, vel primum a ad hunc tertium eia &c. referendo. Verbo igitur: Ratio duplicata quævis aptè exprimetur per a ad e^2a, triplicata per a ad e^3a, illa sc. duplicato rationis nomine, hæc triplicato sive ter in se ducto statim cognoscibilis; quemadmodum compositas alias, ex duabus v. g. per a ad eia, ex tribus, per $eioa$ &c. designare & dignoscere commodè licebit.

Scholion.

MOnendum hîc, etsi nomina duplicatæ & triplicatæ &c. rationis Proportionalitati geometricæ quasi propria sint, à recentioribus tamen eadem arithmeticæ quodammodo accommodata esse, ut e. g. *Progressio Arithmetica duplicata* dicatur, quæ constat ex meris quadratis numerorum aliàs Arithmeticè-proportionalium (e. g. 1, 4, 9, 16, 25 &c.) *Triplicata*, quæ ex eorum Cubis (1, 8, 27, 64 &c.)

DEFINITIO XXXV.

ATque nunc demum intelligi potest, quænam magnitudines Geometris dicantur specialissimè *similes*. Scilicet, cùm aliàs generaliter numerus numero, linea recta rectæ alii, angulus obtusus obtuso, triangulum triangulo &c. similia dici possent; acutus autem angulus obtuso, triangulum parallelogrammo, recta linea curvæ, quadratum oblongo &c. dissimilia; & verò inter illa ipsa ita generaliter dicta simi-

lia multum etiam dissimilitudinis remaneret; placuit illas demum figuras rectilineas strictissimè appellare similes, (α) quæ singulos angulos singulis (nempe A & 𝔄, B & 𝔅, C & ℭ &c. *Fig.* 48.) æquales, & latera circum æquales angulos proportionalia habent, ut sc. sicut est BA ad AC, sic sit 𝔅𝔄 ad 𝔄ℭ &c. (β) & ex solidis figuris illas demum similes vocare, quarum singula plana singulis similia sunt, ac numero utrobique æqualia; sicut e.g. planum AC plano 𝔄ℭ, planum CG plano ℭ𝔊 &c. similia, utrobique verò sex numero habentur.

LIBRI I.
SECTIO II.
Propositiones Demonstrativas jactis superiùs fundamentis superstruens.

CAPUT I.
De
Quantorum Compositione ac Divisione.

PROPOSITIO I.

D*Uorum inæqualium aggregatum, & eorundem*

(α) Euclid. Lib. VI. def. 1.
(β) Lib. XI. def. 9.

rundem differentia in unam summam collecta faciunt majoris duplum.

Demonstratio.

Sit a majus, b minus; erit aggregatum — — a † b
Differentia — — a — b

Summa — — 2 a. per Conf. 1. def. 27. Q. E. D.

Consectarium.

Nuda igitur subsumptione (a) denuò hîc patet veritas Consect. 1. def. 8. quòd anguli duo inæquales super eâdem recta contigui ACD & ACE, (*Fig. 49.*) h. e. (si rectum BCD vel BCE vocemus *a*, & differentiam inter hos & illos *b*) *a*†*b* & *a*—*b*, faciant 2 *a*, h. e. duos rectos æquiparent.

Propositio II.

Si duorum inæqualium differentia subtrahatur ab eorundem aggregato, residuum erit minoris duplum.

Demonstratio.

Si enim ab aggregato a † b
subtrahatur differentia a — b

Residuum erit per Consect. 2. def. 27. o † 2 b. Q. E. D.

(a) Euclid. 13. Lib. I.

PROPOSITIO III.

Si in aggregatum subtrahi ponatur à differentia, residuum est tanto minus nihilo, quantum est minoris duplum.

Demonstratio.

Nam si à differentia a—b
subtrahatur aggregatum a † b

Residuum erit per Consect. 3. alleg. def.
o—2 b. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

Si positivum multiplicetur per privativum, aut contrà, productum est privativum.

Ἔκθεσις.

Sit *a*—*b* multiplicandum per *c*: Certum est, *a* multiplicatum per *c* facere *ac* positivum per Consect. 1. Def. 28. Dico autem —*b* per idem *c* (privativum per positivum) facere —*bc*, totumque adeò productum ex *a*—*b* in †*c* esse *ac*—*bc*.

Demonstratio.

Ponatur *a*—*b* æquale esse *e*; erit ergo *ec* ≈ producto ex *a*—*b* in *c*: Et cùm *a*—*b* sit ≈ *e* per hyp. addito utrinque *b*, erit *a* ≈ *e*†*b* per Schol. def. 26. & utrinque

que porrò multiplicando per c, ac = $ec + bc$ per Consect. 2. def. 28. & ulteriùs utrinque bc subtrahendo, $ac - bc$ = ec, h. e. producto ex $a - b$ in c. Q. E. D.

Consectarium.

Cùm igitur $ac - bc$ ortum sit ex $a - b$ in c; manifestum est vicissim, si $ac - bc$ dividatur iterum per c, debere provenire $a - b$, adeoque positivo ac diviso per positivum c, quotum esse positivum; sed privativo $- bc$ diviso per positivum c, quotum esse privativum.

PROPOSITIO V.

Si privativum per privativum multiplicetur, productum est positivum.

Ἔκθεσις.

Sit $a - b$ multiplicandum per $- c$: Certum est a multiplicatum per $- c$ facere privativum $- ac$ per Prop. IV. Dico autem $- b$ per idem $- c$ multiplicatum producere $+ bc$, adeoq; totum productum esse $- ac + bc$.

Demonstratio priori simillima.

Ponatur $a - b$ = e; erit ergo $- ec$ = producto ex $a - b$ in $- c$: Et cùm $a - b$ sit = e, addito b utrinque, erit a = $e + b$ per Schol. def. 26. & utrinque porrò multipli-

tiplicando per $-c$, $ac = -ec - bc$, per Prop. IV. & Conf. 3. def. 28. & utrinque bc addendo, $-ac + bc = -ec$, h. e. producto ex $a - b$ in $-c$. Q. E. D.

Consectaria.

I.

Cùm igitur $a - c + bc$ sit ortum ex $a - b$ in $-c$; manifestum est vicissim, si $-ac + bc$ dividatur iterum per $-c$, debere rursum provenire $a - b$, adeoque privativo $-ac$ per privativum $-c$ diviso, quotum esse positivum; positivo autem $+bc$ per privativum $-c$ diviso, quotum esse privativum $-b$.

2. Habemus ergo fundamentum, ac demonstrationem regularum Logisticæ speciosæ: In Multiplicationibus ac Divisionibus quantitatum compositarum, eadem signa (nempe + per + vel — per —) facere signum +; diversa verò (h. e. + per — vel — per +) facere signum —. Quas equidem regulas exempla subjecta porrò declarabunt, & plura alia seq. capite occursura.

Multiplicationis.

a+b	a—b	3d—4e+2f
a—b	c—d	5d—g
—ab—bb	—ad+bd	15dd—20de+10df
aa+ab	ac—bc	—3dg+4eg—2gf
aa — bb.	ac—ad—bc+bd.	15dd—20de+10df +4ge—2gf—3dg.

Divisione.

−,a',b' ,a',a' − ,b',b' ,a' † ,b' per ,a' ,† ,b'	a—b	a',c' − ,a',d' − ,b',c' † ,b',d' per ,c' — ,d' ,c' — ,d'	a—b

CAPUT II.

De
Quantorum Potentiis

Euclidis Lib. II. maximam partem & Clavii Append. ad Lib. IX. Prop. 14, compendiosè complexum.

PROPOSITIO VI.

Si totum aliquod divisum sit in duas quascunque partes, (a) factum totius in partem alterutram ducti est æquale quadrato dictæ partis, unà cum facto partium in se invicem ductarum.

Demonstratio.

Sit a † b totum   a † b totum
    b pars una vel   a pars altera

ab † bb. Factum.   aa † ab Factum.

(*Vid. Fig. 50.*)   (Q. E. D.

PRO-

(a) Euclid. Lib. II. Prop. 3. A. C. etiam 3.

Estque & illud hîc unà notandum, propositas duas *surdas quantitates* in casu priore Consect. 2. vocari *communicantes*, in posteriore casu hujus Scholii *Non-communicantes*: nimirum in illo casu quantitas utra-que sub signo radicali per quadratum aliquod di-vidi possunt, emergente eodem quoto (e.g. 8 & 18 possunt dividi, illud per 4, hoc per 9, emer-gente utrobique quotiente 2; pariterque 75 *aa* & 27 *aa* possunt dividi, illud per 25 *aa*, hoc per 9 *aa*, quoto emergente utrobiq; 3;) & tunc si quotus utrobique sub signo radicali relinquatur, quadrati dividentis radix autem ante signum pona-tur, eædem quantitates hac aliâ quoque formâ recte exprimentur: $2\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$, item $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$; estque tunc facilis additio, collectis solùm quantitatibus extra signum radicale repertis, ut sum-mæ sint, ibi $5\sqrt{2}$, hîc $8a\sqrt{3}$, quæ reverà ea-dem sunt cum illis, quas Consect. 2. determinavi-mus: Nam si quantitates extra signum radicale po-sitas viâ contrariâ quadratè multiplicemus, & illa quadrata (25 & 64 *aa*) porrò sub radicale signum per hujus numerum multiplicando, revocemus, pro-veniet ibi $\sqrt{50}$, hîc $\sqrt{192aa}$. (*Conf. infrà Schol. Prop. XXII.*)

PROPOSITIO VIII.

SI totum aliquod divisum sit (a) in duas partes æquales, & in alias duas inæquales: factum inæqualium, unà cum quadrato diffe-rentia partis æqualis ab inæquali, æquatur quadrato partis dimidiæ.

Demon-

(a) Euclid. & Clavii V.

Demonstratio ocularis universalissima.

SInt partes *a* & *a*, ac totum 2 *a*; sit porrò una pars inæqualium b, erit altera 2*a*−*b*, & differentia inter partem æqualem & inæqualem a−b.

		Differentia	a−b
			a−b
Inæqualium	2 a−b		−ab + bb
	+ b		aa−ab
Factum	2 ab−bb		aa−2ab+bb. □

Aggregatum aa (cum cætera se mutuò tollant) Q. E. D. *(Vid. Fig. 52.)*

PROPOSITIO IX.

SI toti cuicunque in duas partes æquales (a) diviso addatur aliquid ejusdem generis, erit factum compositi ex toto & adjecto in adjectum, una cum quadrato dimidii, æquale quadrato compositi ex dimidio & adjecto.

Demonstratio.

SIt totum 2 *a*, adjectum *b*, erit compositum ex toto & adjecto 2 *a* + *b*; ex dimidio verò & adjecto *a* + *b*.

G Comp.

(a) Euclid. & Clav. VI.

Comp. ex tot. & adj. 2 a † b Dim. a
in adject. b a

Factum. 2ab†bb □ dim. aa

Summa 2ab † bb † aa ⩶
(Vid. Fig. 53.)

Comp. a†b
a†b

ab†bb
aa†ab

□ aa†2ab†bb
(Q.E.D.

PROPOSITIO X.

SI totum divisum sit utcunque in (a) duas partes, quadratum totius, unà cum quadrato alterutrius partis, æquale est duplo facto totius in dictam partem ducti, unà cum quadrato partis residuæ.

Demonstratio universalissima.

Sit a pars una, b altera, totum a†b

a † b totum
a pars dicta *

a a † a b
2. Mult.

2 aa † 2 ab Duplum Fact.
adde bb. □ part. alt.

Summa 2 a a † 2 a b † b b

a†b
a†b

†ab†bb
aa†ab

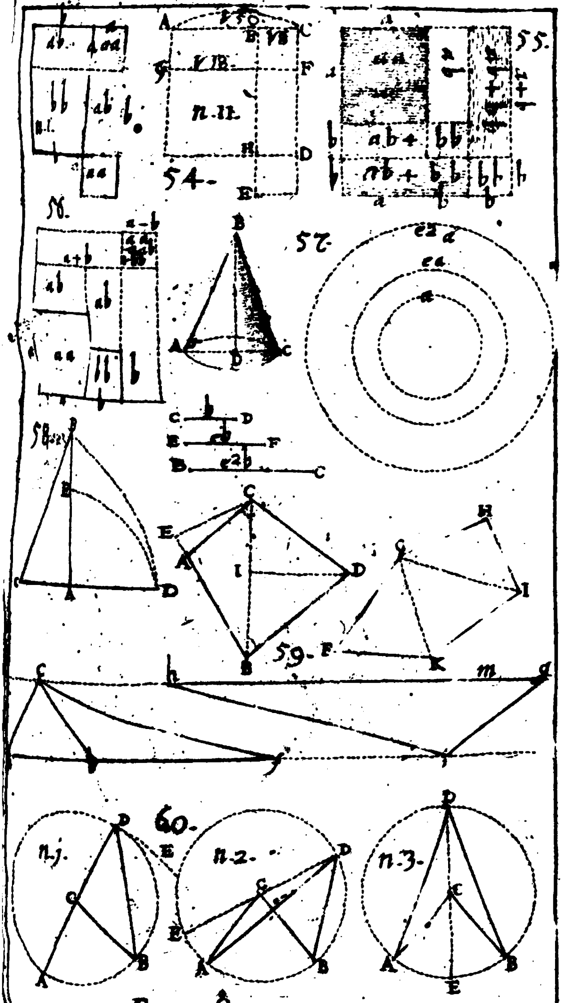
□ totius aa†2ab†bb
* Adde aa

Summa 2aa†2ab†bb
⩶ Q.E.D. *(Vid. Fig. 64. n. I)*

Consectarium.

HInc *Subtractio* numerorum surdorum, aut generaliùs quantitatum surdarum, ope sequen-

(a) Euclid. & Clavii VII.



Pag. 98.

quentis regulæ: *Quadrata radicum datarum addantur*, juxta Consect. 3. Prop. 7. *& ex eorum summa subtrahatur factum duplum ipsarum radicum; residui radix erit quæsita quantitatum datarum differentia.* Ut, si ex $\sqrt{50}$ (AC, *Fig. 54. n. II.*) subtrahenda sit $\sqrt{8}$ (BC) addo 50 (h. e. totum □ AD) & 8 (h. e. □ superadditum DE) eritque summa 58 æqualis duobus factis AF & FE + □ GH, vi nostræ prop. Quæro igitur illa duo facta, multiplicando $\sqrt{50}$ per $\sqrt{8}$, & productum $\sqrt{400}$ porrò per 2 sive per $\sqrt{4}$, ut sit factum duplum desideratum $\sqrt{1600}$, h. e. (extractâ actu radice) 40. Hoc igitur facto duplo sive his 40. subtractis ex superiore summa 58, residuum 18 erit □ GH, ejusque adeò radix (nempe $\sqrt{18}$) dat differentiam desideratam inter datas surdas quantitates.

Scholion.

Breviore tamen viâ hæc eadem subtractio fiet, si quantitas utraque sub signo radicali posita dividi possit per aliquod quadratum eodem utrobique manente quoto, h. e. si quantitates surdæ sint *communicantes*, prout e. g. $\sqrt{50}$ (diviso numero 50 per 25) æquivalet huic $5\sqrt{2}$, & $\sqrt{8}$ illi $2\sqrt{2}$; tunc enim numeris extra signum radicale positis ab invicem subtractis, (nempe $2\sqrt{2}$ ex $5\sqrt{2}$) ha-

betur statim residuum sive differentia $3\sqrt{2}$, i. e. $\sqrt{18}$. Verùm si quantitates propositæ non sint communicantes (ut si $\sqrt{3}$ esset subtrahenda ex $\sqrt{7}$) residuum brevissimè exprimitur mediante signo minus h. m. $\sqrt{7}-\sqrt{3}$, vel etiam secundùm regulam Consect. proximi sic $\sqrt{10-\sqrt{84}}$.

PROPOSITIO XI.

SI totum aliquod divisum sit in duas quascunque partes, (α) erit quadruplum factum totius in unam partem ducti, unà cum quadrato partis alterius, æquale quadrato compositi ex toto & parte priore.

Demonstratio ocularis.

Sit $a+b$ totum b pars una	Compos. $a+2b$ ex toto $a+2b$
$ab+bb$ Factum hor. Mult. per 4	& parte priore $+2ab+4bb$ $aa+2ab$
$4ab+4bb$. Fact. quadruplum Adde aa □. part. alt.	$aa+4ab+4bb$ = Quadrato Compositi. Q. E. D.
$aa+4ab+bb$ Summa	(*Vid. Fig. 55.*)

PROPOSITIO XII.

SI totum aliquod divisum sit in duas partes æquales, (β) & in alias duas inæquales, erunt

(α) Euclid. & Clavii VIII.
(β) Euclid. & Clav. IX.

erunt quadrata partium inæqualium simul sumpta duplum quadrati partis dimidiæ & quadrati differentiæ (partis sc. æqualis ab inæquali) simul sumptorum.

Demonstratio.

SInt partes æquales *a* & *a*, differentia *b*, erit pars major inæqualium *a*†*b*, minor *a*—*b*.

Pars major		Minor		Dim.	Diff.
	a†b		a–b	a	b
	a†b		a–b	a	b
□ aa†2ab†bb		□ aa–2ab†bb		□ aa	□ bb.
Summa horum 2aa†2bb				Summa aa†bb	

Q.E.D. (*Vid. Fig.* 56.)

PROPOSITIO XIII.

SI toti cuicunque in duas partes æquales (*a*) *diviso adjiciatur aliquid ejusdem generis, erit quadratum compositi ex toto & adjecto, unà cum* □ *adjecti, duplum quadrati dimidiæ & quadrati summæ ex dimidio & adjecto simul sumptorum.*

Demonstratio ocularis.

SIt totum 2*a*, partes dimidiæ *a* & *a*, adjectum *b*; erit compositum ex toto & adjecto 2*a*†*b* ex dimidio & adjecto *a*†*b*.

(*a*) Euclid. & Clav. X.

Comp. ex tot. & adj. 2a†b	Dimid. a	Compos. ex dim. & adj. a†b
2a†b	a	a†b
2ab†bb	□aa	□aa†2ab†bb
4aa†2ab		Summa 2aa†2ab†bb.
□4aa†4ab†bb		prioris summæ mani-
□adjecti bb		festè dimidium.
Summa 4aa†4ab†2bb		Q. E. D.

CAPUT III.

De Progressione Sive Arithmeticè-Proportionalibus.

PROPOSITIO XIV.

SI sint tria quanta in Progressione continua, sive Arithmeticè-continuè proportionalia, summa extremorum est dupla medii.

Demonstratio.

Talia sunt e.g. a, $a \dagger x$, $a \dagger 2x$, ascendendo. Vel a, $a - x$, $a - 2x$, descendendo, per def. 32. Est verò summa extremorum ibi $2a \dagger 2x$, hîc $2a - 2x$, utrobiq; medii manifestè dupla. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

SI quatuor fuerint hujusmodi continuè progressio-

gressionalia, summa extremorum est æqualis summæ mediorum.

Demonstratio.

Talia sunt e. g. a, $a+x$, $a+2x$, $a+3x$, ascendendo,

Vel a, $a-x$, $a-2x$, $a-3x$, descendendo:

Et est ibi summa extremorum $2a+3x$ hîc $2a-3x$;

Similiter mediorum $2a+3x$ & $2a-3x$. Q.E.D.

PROPOSITIO XVI.

SI sint quotcunque continuè-progressionalia, summa extremorum semper est æqualis summæ duorum aliorum quorumcunque ab extremis æquè-distantium; aut dupla termini medii, si numero sint imparia.

Demonstratio.

Talia sunt: a, $a+x$, $a+2x$, $a+3x$, $a+4x$, $a+5x$, $a+6x$.

Vel a, $a-x$; $a-2x$, $a-3x$, $a-4x$, $a-5x$, $a-6x$;

Et est extremorum, & binorum quorumcunque ab extremis æquè-remotorum, & medii termini duplum, ibi $2a+6x$, hîc $2a-6x$ &c. Q.E.D.

Scholion I.

NEque dubium esse potest, hoc perpetuò futu-

 rum,

rum, quantumcunque etiam continuetur progressio; modò quis attenderit ultimum terminum habere in se primum ac insuper differentiam toties superadditam quotus ipse est, unicâ solùm vice demptâ, primum autem nullam habere sibi additam differentiam. Tametsi ergò penultimus unam differentiam minus habeat quàm ultimus, secundus econtrà habet unàm plus quàm primus, adeoque horum summa illorum summæ necessariò erit æqualis; quemadmodum similiter antepenultimus deficit geminâ differentiâ ab ultimo, sed econtrà tertius isti addendus excedit geminâ differentiâ primum &c. prout ex nostro exemplo universali est oculis ipsis obvium. Hinc verò seqq. profluunt

Consectaria:

I.

SUmmam quotcunque terminorum arithmeticè-proportionalium haberi, si summa extremorum multiplicetur per dimidium terminorum numerum, aut (quod eodem recidit) dimidia summa per totum terminorum numerum.

2. Ad summam adeò vel sexcentorum terminorum talium obtinendam, non nisi extremos notos esse debere, & insuper terminorum numerum: Ut egregium operæ compendium futurum sit in quæstionibus tali progressione nixis, si possit, dato termino primo & progressionis differentiâ, haberi ultimus, neglectis intermediis.

3. Haberi verò ultimum quemcunque, si

data differentia per datum terminorum numerum unitate minutum multiplicetur, & producto addatur terminus primus, patet ex Scholio præcedente.

4. Exinde verò promptè deducitur: Summam progressionis Arithmeticæ cujuscunq; à o s. cyphra inchoatæ esse subduplam summæ totidem maximo æqualium. Nam si primus terminus sit *o* & ultimus *x*, terminorum verò numerus datus *a*, erit Summa progressionis $\frac{1}{2}ax$ per Conf. 1. Summa verò totidem terminorum æqualium maximo, *ax*. Q. E. D.

Scholion II.

Quod si quis absque his notis literalibus ultimi hujus consectarii veritatem videre gestiat, is cogitet, si primus terminus ponatur *o*, ultimum (quicunque tandem fuerit) simul esse Summam extremorum. Ultimus ergo hic multiplicatus per dimidium terminorum numerum dat Summam progressionis per Consect. 1. & idem ultimus multiplicatus per totum terminorum numerum dat Summam totidem terminorum maximo æqualium. Hanc verò præcedentis duplam esse debere patet, cùm duplus multiplicator in eundem multiplicandum ductus productum necessariò faciat duplum. Sicut autem hoc consectarium infrà nobis egregiam præstabit operam in demonstrandis quibusdam propositionibus: ita priora tria sunt ipsissimæ Regulæ Arithmetices practicæ circa progressiones arithmeticas; quibus illustrandis exempla suppeditat pulchra Swenterus in Delic. Part. I. Quæst. LXX.

CAPUT IV.

De Proportione Geometrica,

Sive καθ' ἐξοχὴν sic dicta, in genere.

PROPOSITIO XVII.

SI sint tria quanta continuè (α) proportionalia, factum extremorum est æquale medii quadrato.

Demonstratio.

Talia sunt e.g. a, ea, e^2a

Extremorum	e^2a	Medii	ea
	a		ea
Factum	e^2a^2	Quadrat.	e^2a^2. Q. E. D.

Scholion.

QUin etiam, si terna cum ternis sint in eadem continua ratione, ut

a ——— ea ——— e^2a

b ——— eb ——— e^2b

facta decussatim extremorum æqualia sunt facto mediorum; ubique sc. e^2ab.

Ex quo porrò subsumendo tantùm patescit illud (β) Archimedis: *Coni recti superficies æqualis est circulo, cujus radius est media proportionalis inter Coni recti*

lat

(α) Euclid. 17. Lib. VI. & 20. Lib. VII.
(β) Lib. I. de Sphær. & Cylindro Prop. XIV.

latus & semidiametrum baseos. Etenim, si inter Coni latus *BC* (*Fig.57*) & semidiametrum baseos *CD* ponatur media proportionalis esse *EF*, cùm totidem radiis respondeant peripheriæ totidem in eadem proportione; erit factum dimidium ex prima linea *BC* in peripheriam ultimam $\frac{1}{2}e^2ab$ (h. e. per Conf. 4. def. 18. superficies Coni dati) æquale facto dimidio mediæ lineæ in peripheriam mediam; $\frac{1}{2}e^2ab$, (h. e. per Conf. 2. Def. 15. areæ circuli ex media proportionali *EF*. Q. E. D.

Potest autem hoc idem Archimedis effatum, etiam hoc modo demonstrari: Si latus Coni *BC* dicatur *b* & baseos semidiameter *a*, (ut peripheria per Conf. 1. Def. 31, sit $2ea$, adeoq; superficies Coni per Conf. 4. Def. 18, eab) erit media proportionalis inter *b* & *a*, vi Prop. hujus XVII. $\sqrt{ab}$; quâ sumptâ pro radio, diameter tota est $2\sqrt{ab}$, & peripheria $2e\sqrt{ab}$. Ergo per Conf. 2. Def. 15. radii dimidium $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$ in peripheriam ductum (cùm $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{ab}$ multiplicatum necessariò producat ipsum quadratum ab) dabit aream circuli ex illa (α) media proportionali eab, æqualem superficiei Coni dati antè iisdem terminis, expressæ. Q.E.D.

Hinc verò sponte fluit etiam illud alterum: *Superficiem Coni* ($\frac{1}{2}e^2ab$) *ad ejusdem basin* ($\frac{1}{2}ab$) *esse ut latus Coni* (e^2b) *ad baseos radium* b; prout ex terminis manifestum est.

PROPOSITIO XVIII.

SI verè sint (β) quatuor, sive continuè sive dis-

(α) cit. Lib. Prop. XV.
(β) Euclid. 16. Lib. VI. & 19. Lib. VII.

discretim, proportionalia, factum extremorum est æquale facto mediorum.

Demonstratio.

Talia sunt 1. continuè, a, ea, e^2a, e^3a

Extrema		Media	
	e^3a		e^2a
	a		ea
Factum	e^3aa	Factum	e^3aa. Q.E.D.

2. discretim, a, ea, b, eb

Extrema		Media	
	eb		ea
	a		b
Factum	eba	Factum	eab. Q.E.D.

Scholion.

FUndatur in hoc Theoremate aurea Practicæ Arithmeticæ Regula, vulgò de-tri, sive trium, dicta, quia datis tribus numeris, (e. g. 2, 5, 8) invenit quartum proportionalem incognitum. Nimirum etsi hic incognitus sit ut dixi, factum tamen ejus cum primo 2 est cognitum, quia idem cum facto mediorum 5 & 8. Jubet igitur regula multiplicare tertium cum secundo; ut habeatur hoc modo factum etiam extremorum: quod porrò divisum per extremum unum, nempe primum datum, dat necessariò alterum, h. e. quartum quæsitum.

PROPOSITIO XIX.

V*Icissim autem, si duo facta, ex multiplicatione binorum quantorum orta, fuerint*

rint æqualia, illa quatuor quanta erunt saltem discretim proportionalia.

Demonstratio.

Sint facta æqualia, *eba* extremorum, & *eab* mediorum; erunt extrema vel *eb* & *a*, vel *e* & *ba*, vel *b* & *ea*, similiterque & media. Quocunque verò modo sumantur utraque, non alia quàm sequentium una poterit esse dispositio:

1. *eb* *eb* *a* *a*
— *e* *ab*
— *ea* *b*; vel inversè
— *a* *eb*
— *ab* *e*
— *b* *ea*:

2. *e* *e* *ba* *ba*
— *eb* *a*
— *ea* *b*; vel inversè
— *ba* *e*
— *a* *eb*
— *b* *ea*:

3. *b* *b* *ea* *ea*
— *a* *eb*
— *ba* *e*; vel inversè
— *ea* *b*
— *eb* *a*
— *e* *ba*: aut inverso omnium ordine. In his omnibus dispositionibus autem proportionem geometricam vi def. 31. & 33. ocularis inspectio statim deprehendit.

Con-

Consectaria.

I.

SIcut igitur proportionalitatis unum signum est ex ipsa definitione petitum, identitas quoti ex divisione consequentium per antecedentia; ita nunc etiam alterum habemus, factorum ab extremis & mediis æqualitatem.

2. Per nudam etiam subsumtionem hinc inferetur veritas Prop. 14. Lib. VI. Euclid. saltem, ex parte: quod infrà tamen adhuc commodiùs ostendetur.

PROPOSITIO XX.

SI deniq; sint quotcunq; continuè proportionalia, factum extremorum est æquale facto quorumlibet duorum mediorum ab extremis æquè distantium, itemq; quadrato medii, si sint numero imparia.

Demonstratio.

TAlia sunt v. g. a, ea, e^2a, e^3a, e^4a, e^5a, e^6a &c. & est extremorum, & binorum quorumcunque ab his æquè-remotorum factum, & medii quadratum, ubiq; e^6aa. Q. E. D.

Scholion I.

NEque dubium esse potest, hoc perpetuò futurum, quantumcunque etiam continuetur progressio; modò quis attenderit, ultimum terminum complecti primum per nomen rationis insuper toties

ties multiplicatum, quotus ipse est in ordine, unicâ solùm vice demptâ; primum autem nudum esse, nullo rationis nomine multiplicatum. Tametsi ergo penultimus terminus unum nomen rationis minus habeat quàm ultimus, secundus econtrà habet unum plus quàm primus, adeoque horum factum illorum facto necessariò erit æquale; quemadmodum similiter antepenultimus deficit gemino rationis nomine ab ultimo, sed econtrà tertius cum isto multiplicandus excedit gemino rationis nomine primum &c. prout ex nostro exemplo universali est oculis ipsis obvium. Hinc verò sequentia profluunt.

Consectaria:

I.

DAtis in continua proportione terminis aliquot (e.g. numero 10) inveniri facilè quemvis alium desideratum (e.g. 17timum), tanquam extremum; dummodò duo dati à primo & illo desiderato æquè remoti (ut sunt e.g. octavus ac decimus) per se invicem multiplicentur, & hoc factum, tanquam factum etiam extremorum, per primum dividatur.

2. Totam verò hanc rem peragi faciliùs, si hæc accesserit observatio, quòd, si v.g. proportionalium quotcunque loca, primo termino præterito, numeris ordinalibus notentur (ut in exemplo universali hîc subjecto patet)

$a, ea, e^2a, e^3a, e^4a, e^5a, e^6a,$

I II III IV V VI,

termini v.g. septimi locus sit VI (& sic alius cujuscunque locus unitate minor ejus numero

inter

1.	10	100
Log. 00000000	10000000	20000000
	1000	10000
	30000000	40000000 &c.

Insimul certis exhibētes sua notas characteristicas initiales, è quibus est videre, Logarithmos monadicorum inter 1 & 10 omnes incepturos à 0, reliquos inter 10 & 100 ab 1, ulteriores inter 100 & 1000 à 2 &c.

Inventis ita Logarithmis proportionalium *primariorum*, inveniendi quoque erant *Logarithmi* omnium his interjectorum numerorum: Cui negotio, diversis modis conficiendo, plures poterant inservire regulæ ex ipsa Logarithmorum naturâ petitæ & in Consect. 3. jam indicatæ. Vid. *Briggii Arithmetica Logarithmica*, & *Henrici Gellibrand Trigonometria Britannica*; quarum illa cap. V. & seqq. utrumque modum à NEPERO in appendice traditum prolixè docet. Simpliciùs rem difficillimam exponit *A. Vlacq* in Tabb. Sin. &c. cujus mentem adhuc explicatiorem ita dabimus: Si quærendus sit e. g. Logarithmus numeri 9, inter 1 & 10, auctos tot cyphris quot habet Logarithmus denarii aut cæterorum proportionalium, (h. e. inter 10000000 & 100000000) quæritur medius proportionalis geometricus, multiplicando scil. hos numeros per se invicem, & ex producto 1000000000000000 extrahendo radicem quadratam; vi Prop. XVII. Hic verò medius proportionalis si minor sit 9 aucto totidem cyphris, inter ipsum & priorem denarium quæritur secundus, inter hunc & eundem illum tertius, & sic porrò quartus &c. medius proportionalis; sin major, inter ipsum & proximè minorem alius, &c.

donec

Scholion II.

UT artificii hujus admirandi (quod ante hos annos circiter 30 à *Johanne Nepero, Barone Merchistonio Scoto-Britanno*, inventum, & paulò difficiliùs expositum, deinceps ab *Henrico Briggio* Oxoniæ Geom. Professorum Savilianorum primo perfectum multumq; facilitatum est) totam rationem in Synopsi quadam, & modo quidem facillimo, exhibeamus; cùm ejus utilitas in grandioribus Tabb. Sinuum & Tangentium numeris omnium maxima esset futura, nec hi tamen sine vulgarium numerorum admixtione, in Praxi præsertim Geometrica &c. ferre fructum istum poterant, utrisque accommodandum erat hoc Logarithmicum artificium. *Primùm* igitur vulgaribus numeris ab 1 ad 1000 vel 10000, &c. procedentibus omnibus ac singulis ut assignarent suos Logarithmos artifices, ex ipsorum serie excerpserunt illos ante omnia, qui continuatâ Proportione Geometricâ procederent, ac speciatim illos, arbitrariâ selectione, qui decuplâ proportione crescerent, e. g.

1, 10, 100, 1000, 10000 &c.

Hîc verò, juxta fundamentum Consect. 3. seriem ordinalium arithmeticâ progressione substraturi, non ipsos numeros simplices 1, 2, 3 &c. sed plurimis cyphris adauctos adhibuerunt, ut hoc modo cæteris etiam intermediis, inter 1 & 10, inter 10 & 100 &c. numeris suos assignare Logarithmos integro numero possent. Respondebant ergo, per hoc primum suppositum, istis geometricè-proportionalibus Logarithmi sui arithmeticè-proportionales eo, quo hîc videmus modo;

	1.	10	100
Log.	0000000	10000000	20000000
		1000	10000
		30000000	40000000 &c.

Insimul certis exhibêt suas notas characteristicas initiales, è quibus est videre, Logarithmos monadicorum inter 1 & 10 omnes incepturos à 0, reliquos inter 10 & 100 ab 1, ulteriores inter 100 & 1000 à 2 &c.

Inventis ita Logarithmis proportionalium primariorum, inveniendi quoque erant Logarithmi omnium his interjectorum numerorum: Cui negotio, diversis modis conficiendo, plures poterant inservire regulæ ex ipsa Logarithmorum naturâ petitæ & in Consect. 3. jam indicatæ. Vid. *Briggii Arithmetica Logarithmica*, & *Henrici Gellibrand Trigonometria Britannica*; quarum illa cap. V. & seqq. utrumque modum à NEPERO in appendice traditum prolixè docet. Simpliciùs rem difficillimam exponit *A. Vlacq* in Tabb. Sin. &c. cujus mentem adhuc explicatiorem ita dabimus: Si quærendus sit e. g. Logarithmus numeri 9, inter 1 & 10, auctos tot cyphris quot habet Logarithmus denarii aut cæterorum proportionalium, (h. e. inter 10000000 & 100000000) quæritur medius proportionalis geometricus, multiplicando scil. hos numeros per se invicem, & ex producto 1000000000000000 extrahendo radicem quadratam; vi Prop. XVII. Hic verò medius proportionalis si minor sit 9 aucto totidem cyphris, inter ipsum & priorem denarium quæritur secundus; inter hunc & eundem illum tertius, & sic porrò quartus &c. medius proportionalis; sin major, inter ipsum & proximè minorem alius, &c.

donec

donec post plurimas operationes prodeat numerus 8999 9998 proximè accedens ad 9. 0000000. Quod si tandem etiam inter unitatis ac decadis Logarithmum (h. e. inter 0 & 10000000) quæratur medius proportionalis arithmeticus (0 5000000) summam sc. illorum bisecando, vi Prop. XIV; & inter hunc eundemque decadis Log. iterum alius, eodemque modo tertius, quartus &c. habebitur tandem ille quoque qui ultimo superiori, h. e. 9. dato respondet. Vid. sequens specimen.

Tab. Med. Proport. geometricorum inter 1 & 10 auctos 7 cyphris, & arithmeticè talium inter 0 & 10000000 istis sc. respondentes Logarithmos.

Medii Prop. Geometr.		Medii Prop. Arithmet. Logar.
3 1 6 2 2 7 7 7	Primus	0 5 0 0 0 0 0 0.
5 6 2 3 4 1 3 2	Secund.	0 7 5 0 0 0 0 0
7 4 9 8 9 4 2 6	Tertius	0 8 7 5 0 0 0 0
8 6 5 9 6 4 3 5	Quart.	0 9 3 7 5 0 0 0
9 3 0 5 7 2 0 5	Quint.	0 9 6 8 7 5 0 0
8 9 7 6 8 6 9 8	Sextus	0 9 5 3 1 2 5 0
9 1 3 9 8 3 2 7	Septim.	0 9 6 0 9 3 7 5
9 0 5 7 9 8 4 7	Octav.	0 9 5 7 0 3 1 2
9 0 1 7 3 3 6 0	Nonus	0 9 5 5 0 7 8 1
8 9 9 7 0 8 0 1	Decim.	0 9 5 4 1 0 1 5
	&c. &c.	

quæ hoc modo conditur: Pro columna prima, inter 10 000 000 & 100 000 000 inventus medius proportionalis geometricus est hujus Tab. pri-

mus; inter hunc & eundem posteriorem præcedentium nempe 10000000, alius medius dat secundum &c. usque ad quintum 93057205: qui cùm jam novenario major sit, inter ipsum & præcedentem quartum medius alius fit hoc ordine sextus, sed novenario sensibiliter minor. Ergo inter ipsum & quintum habebitur septimus, novenario adhuc major; inter septimum & sextum octavus, novenario quidem propior, nondum tamen sensibiliter æqualis, sed justo adhuc major; inter octavum & sextum nonus, inter nonum & sextum decimus, novenario gradatim proximi, cum aliqua tamen adhuc sensibili differentia. Quod si igitur continuetur inquisitio medii proportionalis inter hunc decimum, tanquam justo minorem, & præcedentem nonum, tanquam justo adhuc majorem, & sic porrò, obtinebitur tandem numerus 8999 9998 non nisi binario differens à novenario septem cyphris aucto, adeoque ab ipso novenario insensibiliter. Pro hujus Logarithmo autem in columna secunda eodem processu quæruntur medii arithmeticè proportionales inter binos quosque Logarithmos, binis quibusque superiorum respondentes, donec inveniatur e. g. Logarithmus numeri decimi, 09541015, tandemque Logarithmus illius ultimi, novenario sensibiliter æqualis, 09542425.

Sic igitur inventis, ingenti quidem labore computantium, sed ingenti quoque fructu postea iis utentium, Logarithmis aliquot numerorum inter 1 & 10, inter 10 & 100 &c. innumerabiles cæterorum quoque intermediorum numerorum haberi potuerunt labore multò minore, sc. ope regularum quarundam ex Consect. 3. præs. Prop. ita

con-

concipiendarum: *1. Summa Logarithmorum multiplicantis & multiplicandi dat Logarithmum producti: 2. Logarithmus divisoris subtractus à Log. dividendi relinquit Logarithmum quotientis: 3. Logarithmus numeri cujusdam duplicatus est Logarithmus quadrati, triplicatus cubi &c. 4. Semissis numeri cujusdam est Logarithmus radicis quadratæ, triens cubicæ &c.* Sic e. g. si fuerit inventus Logarithmus numeri 9 modo hactenus declarato, eademque ratione inveniatur Logarithmus numeri 5 (quærendo sc. inter secundum & primum tabulæ nostræ, & inter horum Logarithmos, proportionales medios, &c. &c.) his duobus Logarithmis mediantibus obtinebuntur alii plurimi: *Primò*, cùm 10 divisa per 5 dent 2, si Logarithmus quinarii subtrahatur à Log. denarii, habebitur Logarithmus binarii *per reg. 2. Secundò* cùm 10 multiplicata per 2 producant 20, & per 9 faciant 90, additis Logg. 10 & 2, 10 & 9, habebuntur Logg. numerorum 90 & 20, *per reg. 1. Tertiò* cùm 9 sit quadratus & ejus radix 3, dimidium ex Log. novenarii dat Log. ternarii *per reg. 4. Quartò* cùm 90 per 3 divisa dent 30, hujus numeri Logarithmus habetur, subtrahendo Logarithmum 3 ex Logarithmo 90, *per reg. 2. Quintò* cùm 5 & 9 quadratè multiplicati faciant 25 & 81, horum numerorum Logg. dant dupli Logg. quinarii & novenarii, *per reg. 3.* Similiter *Sextò* Summa Logg. 2 & 3, vel differentia Logarithmorum 5 & 30, est Logarithmus 6, & Summa Logg. 3 & 6, vel 2 & 9, dat Log. 18; duplus Log. 6. Logarithmum 36 &c. &c. Et hoc pacto inventi sunt & in Tabb. redacti Logarithmi numerorum vulgarium ab 1 usque ad 10000 (ut

in Tabb. Strauch. p. 132. & seqq.) vel usque ad 100000 (ut in Chiliadibus Briggii.) Quo pacto verò ex his vulgarium numerorum Logarithmis illi Tabb. Sinuum & Tangentium porrò deducti sint, suo loco docebimus in Schol. Prop. LV. hoc uno solùm in antecessum hîc indicato, quòd eleganter artificium hoc Logarithmicum nobis declaret *Dn. Pardies* Elem. Geom. p.m. 112. per lineam quandam curvam, *Logarithmicam* inde dictam, cujus ope & inveniri faciliùs Logarithmos posse confidit, & inventis illis numerorum inter 1000 & 10000, statim haberi cæteros omnium aliorum numerorum inter 1 & 1000 ostendit: qua de re infrà in Schol. Def. XV. Lib. II. pluribus.

PROPOSITIO XXI.

SI quotcunque continuè-proportionalium terminus primus subtrahatur ab ultimo, & residuum dividatur per nomen rationis unitate minutum, erit quotus æqualis Summæ omnium excepto ultimo.

Demonstratio ocularis.

	$+ ea$	
Sit ultimus	$+ e^2a$	
terminus	$+ e^3a$	
minutus	$+ e^4a$	
primo	$+ e^5a$	
	$e^6a - a$	*Quotus $e^5a + e^4a + e^3a$
& div. per	$e - x$	$+ e^2a + ea + a$; pateto; ex
nomen ra-	$e - x$	ipsa operatione, idem
tionis uni-	$e - x$	perpetuò futurum, si
tate minu-	$e - x$	terminorum numerus
tum; erit *	$e - x$	quantumlibet conti-
	$e - x$	nuetur.
	$e = x$	

Con-

Consectaria.

I.

IN addenda igitur quantacunque geometricè-proportionalium serie, cùm sufficiat notum esse terminum ultimum ac primum cum nominationis *vi Prop. præsentis*; &, inventis aliquot saltem proportionis terminis, quilibet postmodum inveniri possit cujus locus compositus sit ex locis binorum antecedentium *juxta Consf. 2. Prop. 20.* multiplicando scil. terminos binis locis memoratis respondentes, & productum per terminum primum dividendo; facile nunc erit ingentem proportionalium seriem in unam summam colligere, ignoratis licet separatim plerisq; omnibus.

Scholion I.

HÆ nimirum sunt ipsissimæ regulæ Arithmeticæ Practicæ circa progressiones Geometricas; quibus illustrandis exempla jucundissima reperire datur in Delic. B. Swenteri Lib. I. Prop. LIX. & seqq. Inprimis autem huc facit exemplum palmarium de alveo aleatorio ejusque 64 areolis, quod verbis *Ebn Chalecan* Arabis in Romanum idioma translatis exponit *Joh. Wallisius* Oper. Mathem Part. I. cap. XXXI, cuique illustrando alibi exercitationem integram impendimus, hîc verò hæc pauca solùm adnotamus: Si termini proportionis duplæ supponantur 64 ab unitate, primique eorum, suis notati numeris localibus, sint sequentes,

1	2	4	8	16	32	64	128
	I	II	III	IV	V	VI	VII

habebitur terminus loci XIIItii 8192, multiplicatis inter se terminis loci VI & VII; ac terminus loci XXVIti, multiplicato hoc novo numero in seipsum; porroque terminus loci LIIdi, invento rursum in seipsum ducto; & ulterius LIXni loci terminus per multiplicationem modò inventi in numerum loci VIImi; tandemque terminus loci LXIIItii, (*h. e.* ultimus in serie proposita) multiplicato novissimè invento in numerum loci IVti.

2. Quinimò infinitas etiam proportionalium terminorum series hac arte in unam summam licet colligere, tametsi ipsos terminos numerò infinitos nôsse & percurrere seorsim omnes sit impossibile. V.g. Cùm *in continuata serie fractionum in ratione dupla decrescentium*, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ &c. *in infinitum*, si spectetur ordine retrogrado, pro termino primo jure habeatur cyphra (inter $\frac{1}{2}$ enim & 0 interjacent infiniti hujusmodi termini;) *erit Summa infinitorum horum terminorum præcisè æqualis unitati*. Etenim subtracto primo 0 ab ultimo $\frac{1}{2}$ ac residuo $\frac{1}{2}$ diviso per nomen rationis unitate minutum, h. e. per 1, quæ nihil dividit, quotus $\frac{1}{2}$ est Summa terminorum omnium excepto ultimo, *per Prop. 21.* adeoque ultimo $\frac{1}{2}$ superaddito, Summa omnium in tota illa serie est 1. Quod si ultimus non sit $\frac{1}{2}$ sed 1, Summa omnium necessariò erit 2, si 2 sit ultimus, Summa omnium est 4; verbo semper dupla termini ultimi.

3. Et

3. Et cùm in hoc casu Summa præcedentium omnium sit æqualis ultimo termino, illâ ex hoc subtractâ restabit nihil, h. e. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$ &c. in infinitum est = 0. pariterq; $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ &c. vel $2 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ &c. = 0.

4. Similiter *Summa fractionum ab $\frac{1}{3}$ in ratione tripla seriè infinitâ decrescentium*, ($\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ &c.) *æquatur dimidio*: Nam si ex ultimo $\frac{1}{3}$ (inverso nempe rursum ordine) subtrahatur primus 0, & residuum $\frac{1}{3}$ dividatur per nomen rationis unitate minutum h. e. per 2; erit quotus $\frac{1}{6}$ omnium antecedentium Summa, additoq; huic ultimo $\frac{1}{3}$ sive $\frac{2}{6}$, Summa universorum $\frac{3}{6}$ sive $\frac{1}{2}$.

5. Sic *series infinita fractionum ab $\frac{1}{4}$ in ratione quadrupla decrescentium* ($\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ &c.) *æquatur trienti sive $\frac{1}{3}$*; siquidem ex ultimo $\frac{1}{4}$ subtracto primo 0, & residuo $\frac{1}{4}$ diviso per nomen rationis unitate minutum, h. e. per 3, provenit $\frac{1}{12}$ Summa omnium excepto ultimo, & addito quoq; ultimo $\frac{1}{4}$ sive $\frac{3}{12}$, Summa tota $\frac{4}{12}$ sive $\frac{1}{3}$.

6. Ita *series infinita ab $\frac{1}{5}$ in ratione quintupla decrescentium* ($\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}$ &c.) *æquatur $\frac{1}{4}$*: $\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216}$ &c. æquatur $\frac{1}{5}$ &c. quælibet sc. series hujus generis est fractioni cujus denominator unitate minor est denominatore fractionis ultimæ in illa serie.

7. Generatim etiam *qualibet series infinita fractionum decrescentium secundùm rationem denominatoris ultimi termini, & numeratorem communem habentium unitate minorem denominatore ultimi* (e. g. $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}$ &c.

 vel

vel $\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}$ &c. vel $\frac{4}{5}+\frac{4}{25}+\frac{4}{125}$ &c.) *æquivalet unitati*, eodem modo quo ſeries Conſect. 2. quæ ſub hoc genere comprehenditur: id quod eadem methodo, quâ hactenus uſi ſumus, in ſingulis caſibus demonſtrari, vel ex Conſect. 4, 5 & 6. nudè ſubſumi poteſt. Cùm enim e. g. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$ &c. æquetur $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ &c. æquabitur $\frac{2}{2}$ h. e. 1. & ſic in cæteris.

8. Specialiter, $\frac{3}{72}+\frac{3}{288}+\frac{3}{1152}$ &c. *in ratione quadrupla decreſcentium Summa æquivalet* $\frac{1}{18}$; pariterque Summa ex $\frac{3}{64}+\frac{3}{256}+\frac{3}{1024}$ &c. æquivalet $\frac{1}{16}$; & $\frac{7}{64}+\frac{7}{512}+\frac{7}{4096}$ &c. in ratione octupla decreſcentium Summa æquivalet $\frac{1}{8}$: Siquidem ſubtracto primo termino o, & reſiduo per nomen rationis unitate minutum, h. e. per 3, diviſo, quotus $\frac{1}{72}$ dat Summam omnium excepto ultimo. Hoc ergo (nempe $\frac{3}{72}$) addito, Summa omnium erit $\frac{4}{72}$ ſive $\frac{1}{18}$: Similiterque $\frac{7}{64}$ per nomen rationis unitate minutum diviſis, quotus dat $\frac{1}{64}$ & addito ultimo Summa omnium eſt $\frac{8}{64}$ i. e. $\frac{1}{8}$. Ut hinc evidens ſit $\frac{1}{18}-\frac{3}{72}-\frac{3}{288}-\frac{3}{1152}$ &c. vel $-\frac{1}{18}+\frac{3}{72}+\frac{3}{288}+\frac{3}{1152}$ &c. in infinitum, æquari nihilo; pariterque $\frac{1}{8}-\frac{7}{64}-\frac{7}{512}-\frac{7}{4096}$ &c. æquari o.

9. *Summa progreſſionis Arithmeticæ ſimplicis* (h. e. per numeros cardinales aſcendentis) *ab 1 in infinitum continuata, eſt ſubdupla Summa totidem terminorum maximo æqualium; aut contrà hac Summa eſt illius dupla.* Promptum equidem fuiſſet hoc ſub Conſect. 4. Prop. XVI. ſubſumere, ſiquidem præ-

fixâ

ſextæ unitati cyphrâ caſum illius conſectarii habemus, progreſſionis interim Summâ eadem manente. Verùm ab 1 incipiente ſerie infinitâ (in determinata enim ſive finita ſerie ratio ſummarum ſemper eſt minor duplâ, tametſi ſemper etiam propiùs ad duplam accedit, quò major eſt ſeries) rem procedere ſic demonſtramus: Ad Summam trium terminorum, 1, 2, 3 h. e. 6 Summa totidem maximo æqualium, h. e. 9 ſe habet ut 3 ad 2; ſed ad Summam ſex terminorum, 1, 2, 3, 4, 5, 6 h. e. 21, Summa totidem maximo æqualium, h. e. 36 ſe habet, ut 3 ad $1\frac{3}{4}$, decremento exiſtente $\frac{1}{4}$: Porrò verò ad Summam duodecim terminorum, quæ reperitur *per Conſ. 1. Prop. XVI.* æqualis 78, Summa totidem maximo æqualium, 144, ſe habet (dividendo utrinque per 48) ut 3 ad $1\frac{30}{48}$ h. e. 3 ad $+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ (nam 24 faciunt $\frac{1}{2}$ & reſiduæ $\frac{6}{48}$ ſunt idem quod $\frac{1}{8}$) decremento nunc exiſtente $\frac{1}{8}$. Cùm igitur ulteriùs duplicando terminorum numerum reperiatur ulterius decrementum $\frac{1}{16}$, & ſic porrò in ratione dupla; Summa infinitorum talium in arithmetica progreſſione maximo æqualium, eſt ad Summam progreſſionis ipſius ab 1 in infinitum, ut 3 ad $2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$ &c. h. e. per Conſect. 2. ut 3 ad $2-\frac{1}{2}$, h. e. ut 3 ad $1\frac{1}{2}$ ſive ut 2 ad 1. Q. E. D.

10. *Summa progreſſionis Arithmeticæ duplicatæ* (h. e. per quadrata numerorum cardinalium aſcendentis) *ab 1 in infinitum continuata, eſt ſubtripla Summæ totidem terminorum maximo æqualium.* Nam quælibet

prp-

progreſſio talis finita major quidem eſt ſubtriplâ, ſed propius propiusque ad ſubtriplam accedit, quò major eſt progreſſionis ſeries. Sic Summa trium terminorum 1, 4, 9, h.e. 14. ad ter 9, h.e. 27, eſt ut $1\frac{5}{9}$ ſive $1\frac{10}{18}$ ſive $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{18}$ ad 3 (dividendo ſc. utrinque per 9;) ſed Summa ſex terminorum 1, 4, 9, 16, 25, 36, nimirum 91 ad ſexies 36, h.e. ad 216 (dividendo utrinque per 72) eſt ut $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{72}$ ad 3; & Summa duodecim terminorum 650 ad duodecies 144 h.e. 1728 (dividendo utrinque per 576) ut $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{288}$ ad 3 &c. decreſcentibus ita fractionibus adhærentibus perpetuò, alteris parte ſui dimidiâ, alteris $\frac{1}{4}$tis (Nam $\frac{1}{18}$ eſt $\frac{4}{72}$, ergo decrementum primum eſt $\frac{3}{72}$, & $\frac{1}{72}$ eſt $\frac{4}{288}$, decrementum ergo ſecundum eſt $\frac{3}{288}$ &c.) Erit ergo Summa progreſſionis infinitæ ad Summam totidem terminorum maximo æqualium, ut

$$\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{18} \\ \quad -\frac{1}{4}-\frac{3}{72} \\ \quad -\frac{1}{8}-\frac{3}{288} \\ \quad -\frac{1}{16}\,\&c-\frac{3}{1152}\,\&c. \end{array}$$

ad 3 h.e. per Conſect. 3. & 8, ut 1 ad 3. Q.E.D.

11. *Conſ. Summa progreſſionis Arithmeticæ triplicatæ* (h.eſt. per cubos numerorum cardinalium aſcendentis) *ab 1 per 8, 27, 64 &c. in infinitum continuata, eſt ſubquadrupla Summæ totidem terminorum maximo æqualium.* Nam Summa quatuor terminorum 1, 8, 27, 64 h.e. 100 ad quater 64 h.e. 256 (utrinque dividendo per 64) reperitur eſſe ut $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ ad 4; ſed Summa octo terminorum, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 h.e. 1296, ad

ad octies 512 h.e. 4096 (utrinque dividendo per 1024) invenitur esse ut $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{64}$ ad 4 &c. decrescentibus ita fractionibus adhærentibus perpetuò, alteris parte sui dimidiâ, alteris $\frac{3}{4}$tis (Nam $\frac{1}{16}$ est $\frac{4}{64}$, & $\frac{1}{64}$ est $\frac{4}{256}$; decrementum ergo primum est $\frac{3}{64}$ & secundum $\frac{3}{256}$ &c. Erit ergo Summa progressionis infinitæ ad Summam totidem terminorum maximo æqualium,

$$\text{ut } 1 + \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{8}$$
$$- \frac{1}{4} \quad - \frac{3}{64}$$
$$- \frac{1}{8} \text{ \&c.} - \frac{3}{256} \text{ \&c. ad } 4;$$

h.e. per Consect. 3. & 8; ut 1 ad 4. Q.E.D.

12. *Consect. Summa progressionis infinitæ, cujus maximus terminus sit quadratus numerus, reliqui verò decrescentes secundùm numeros impares, 1, 3, 5, 7 &c. est Summæ totidem terminorum æqualium subsesquialtera*, h. e. ut 2 ad 3. Nam Summa trium ejusmodi terminorum e.g. 9, 8, 5 h.e. 22 ad ter 9 h.e. 27 est (utrinque dividendo per 9) ut $2\frac{4}{9}$ s. $\frac{8}{18}$ ad 3. sive $2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{18}$ ad 3. Sed Summa sex ejusmodi terminorum, 36, 35, 32, 27, 20, 11 h.e. 161 ad sexies 36 h.e. ad 216 (utrinque dividendo per 72) est ut $2 + \frac{1}{4} - \frac{5}{72}$ &c. decrescentibus ita fractionibus adhærentibus perpetuò, alteris parte sui dimidiâ, alteris $\frac{3}{4}$tis, prorsus ut suprà Consect. 10. Erit ergo Summa progressionis infinitæ ad Summam totidem terminorum maximo æqualium,

$$\text{ut } 2 + \frac{1}{2} \quad - \frac{1}{18}$$
$$- \frac{1}{4} \quad + \frac{3}{72}$$
$$- \frac{1}{8} \text{ \&c.} + \frac{3}{288} \text{ \&c. ad } 3.$$

h.e. *per Consect. 3. & 8*, ut 2 ad 3. Q.E.D.

Scholion II.

HAbemus igitur nunc præcipua fundamenta, nostro more demonstrata, *Scientiæ* sive *Methodi*, sivè *Arithmeticæ Infinitorum*, quam primus, quod sciam, *Joh. Wallisius* Oxon. Geom. Prof. Savil. feliciter aggressus est, deinde *Ismaël Bullialdus* altiùs evexit, & nuperrimè *Dethlevus Cluverus* ampliùs perficere conatus est. Et his fundamentis nixi, demonstrabimus infrà paucis lineolis, à priori directèque, palmarias illas Geometriæ propositiones, quas Veteres non nisi indirectè & integrorum voluminum impensâ demonstrare potuerunt.

Propositio XXII.

PRoportionalium, sive (a) continuè sive discretim talium, potestates etiam, h. e. quadrata, cubi &c. sunt proportionalia.

Demonstratio ocularis.

	Continuè Proport.				Discretim Proport.			
	a	ea	e^2a	e^3a	a	ea	b	eb
Quadrata	a^2	e^2a^2	e^4a^2	e^6a^2	a^2	e^2a^2	b^2	e^2b^2
Cubi.	a^3	e^3a^3	e^6a^3	e^9a^3	a^3	e^3a^3	b^3	e^3b^3.

(Q. E. D.

Scholion.

FUndatur in hac veritate 1. Ratio Multiplicandi ac dividendi quantitates surdas. Etenim, cùm ex ipsa natura & definitione multiplicationis cer-

tùm

(a) Euclid. Lib. VI. Prop. 22.

tum sit, esse 1 ad multiplicantem, uti multiplicandus ad productum (quoties enim unitas est in multiplicante, toties multiplicandus sibimetipsi additus constituit productum) si multiplicanda sit $\sqrt{5}$ per $\sqrt{3}$, erit ut 1 ad $\sqrt{3}$ sic $\sqrt{5}$ ad productum, & per præsentem, ut 1 ad 3 sic 5 ad □ Prod. h. e. ad 15. Ergo productum est $\sqrt{15}$, adeoq; regula Multiplicandi surdas quantitates hæc; *Multiplicentur ipsæ quantitates sub signis radicalibus propositæ, & producto præfigatur signum radicale.* Similiter, cùm ex natura divisionis certum sit, esse Divisorem ad dividendum ut 1 ad quotum (hic enim suis unitatibus exprimit quoties divisor in dividendo sit repertus) si dividenda sit $\sqrt{15}$ per $\sqrt{5}$, erit $\sqrt{5}$ ad $\sqrt{15}$, ut 1 ad quotum, & per præsentem, 5 ad 15 ut 1 ad □ quoti h. e. ad 3. Ergo quotus est $\sqrt{3}$, adeoque regula dividendi quantitates surdas hæc: *Dividantur ipsæ quantitates sub signis radicalibus expositæ, & quoto præfigatur signum radicale.*

2. Fluit hinc etiam usitata in Arithmetica surdorum Reductio surdarum quantitatum ad alias ex parte saltem rationales, & contrà talium ad formam merè surdarum. E. g. Si quantitatem hanc mixtam $2a\sqrt{b}$ h. e. $2a$ multiplicata per $\sqrt{b}$ velim reductam ad formam merè surdæ quantitatis, quæ tota sub signo radicali contineatur; quadratum quantitatis rationalis extra signum positæ $4aa$ si afficiatur signo radicali, hac nempe formâ $\sqrt{4aa}$, æquivalet ipsi quantitati rationali $2a$. Sed multiplicata

cata $\sqrt{4aa}$ per $\sqrt{b}$ facit $\sqrt{4aab}$, per num. 1. hujus Schol. Ergo $\sqrt{4aab}$ æquivalet etiam quantitati primùm propositæ $2a\sqrt{b}$. Vicissim ergo, si formula hæc merè surdæ quantitatis $\sqrt{4aab}$ velit ad simpliciorem reduci, quæ habeat extra signum radicale positum, quicquid inibi rationale fuerat, quantitatem sub signo $\sqrt{}$ comprehensam dividendo per aliquod quadratum aut cubum &c, ut hìc per $4aa$ (h. e. $\sqrt{4aab}$ per $\sqrt{4aa}$ h. e. $2a$) quotus erit $\sqrt{b}$, qui multiplicatus per divisorem $2a$, rectè exprimet quantitatem propositam hac formâ simpliciore $2a\sqrt{b}$: id quod Scholiis Propp. VII. ac X. plenam demum lucem affundent.

PROPOSITIO XXIII.

Si sint quatuor quæcunque Proportionalia (a, ea, b, eb) *erunt illa quoque Proportionalia,*

1. Inversè ea ad a ut eb ad b:
2. Alternatim (α) a ad b ut ea ad eb:
3. Compositè, (β) $a + ea$ ad ea, ut $b + eb$ ad eb:
4. Conversim $a + ea$ ad a, ut $b + eb$ ad b:
5. Divisim (γ) $a - ea$ ad $\left\{\begin{matrix} ea, \\ \text{vel } a\end{matrix}\right.$ ut $b - eb$ ad $\left\{\begin{matrix} eb \\ \text{vel } b\end{matrix}\right.$:

6. Per

(α) Euclid. 15, 16. V. 9, 10, 13. VII.
(β) 18. V.
(γ) 17. V.

6. (α) Per Syllepsin *a* ad *ea*, ut *a* † *b* ad *ea*†*eb*:

7. Per Dialepsin *a* ad *ea*, ut *a*—*b* ad *ea*—*eb*:

Quæ omnia, vel conferendo mediorum & extremorum facta, juxta Prop. XIX. ejusq; Consect. 1. vel dividendo consequentia quælibet per sua antecedentia juxta def. 31. poterunt ad oculum esse manifesta.

PROPOSITIO XXIV.

SI sit (β) *in duplici quantorum serie ordinatè,*

ut a ad ea & *porrò ut ea ad oa*
sic b ad eb & *porrò sic eb ad ob &c.*

erit etiam ex æquo,

ut primum a ad ultimum oa in I. serie.
sic primum b ad ultimum ob in II. serie.

Id quod est ex ipsis terminis manifestum.

PROPOSITIO XXV.

SIn (γ) *fuerint perturbatè,*

ut oa ad ea \] **ut ea ad a*†
†*sic eob ad ob*; \[*sic ob ad eb.* *Et porrò

erit iterum ex æquo,

ut primum oa ad ultimum a in I. serie.
sic primum eob ad ultimum eb in II. serie.

Prout ex factis extremorum & mediorum, imò ex ipsis terminis, abundè patet.

(α) Euclid. 1. 12. V, 5. 6. 12. VII.
(β) Euclid. 3, 20, 22. Lib. V. 14. VII.
(γ) Euclid. 21, 23. Lib. V.

PROPOSITIO XXVI.

SI *sit* (α) *ut totum ea. ad totum a. sic ablatum eb ad ablatum b; erit etiam*

Reliquum reliquum Totum Totum

ea—eb. ad a—b: ut ea ad a.

Loquuntur hoc facta extremorum & mediorum, quæ sunt utraque *eaa—eab*. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

FActa (β) *communem efficientem habentia sunt inter se ut efficientes reliqui.*

Demonstratio.

SInt facta *ab* & *ac* communem efficientem *a* habentia; Dico esse

ut *b* ad *c*, sic *ab* ad *ac*:

Quod equidem extremorum & mediorum facta comparando ad oculum patescit, insimulq; alterum illum modum probandæ proportionalitatis plenè declarat, quo dividendo consequentes per suos antecedentes identitatem quotorum demonstrare solemus.

Scholion I.

NItitur enim hoc Theoremate, inter cætera, fractionum 1. reductio, vel ad compositas magis vel ad simpliciores; ibi sc. multiplicando, hic dividendo per idem, & numeratorem & denominatorem, ut e. g. $\frac{c}{b}$ & $\frac{ac}{ab}$ & $\frac{eac}{eab}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$ &c.

Sint

(α) Euclid. 5. & 19. Lib. V. 7. & 11. Lib. VII.
(β) Præter complures Euclid. Propp. ad seq. notatas, etiam 17. & 18. Lib. VII.

Sint eædem quoad rem fractiones: 2. Reductio ad eandem denominationem, ut si $\frac{b}{c}$ & $\frac{a}{d}$ debeant mutari in alias duas eundem habentes denominatorem; id quod fit multiplicando & numeratorem & denominatorem unius per denominatorem alterius, ut proveniant illarum loco hæ $\frac{bd}{cd}$ & $\frac{ac}{cd}$.

Scholion II.

Commodum erit hoc loco, tanquam proportionalium ἐπίμετρον, docere modum, *datum quodcunq; quantum a extremâ & mediâ ratione secandi.* Nimirum; si pro majore parte ponamus x, minor erit $a-x$, & sic per hyp. hæc tria, a, x, & $a-x$ erunt proportionalia, per def. 34. Ergo per Prop. XVII. factum extremorum $aa-ax$ = quadrato medii xx, & (addito utrinque ax) $aa = xx + ax$; & porrò addito utrinque $\frac{1}{4}aa$, erit $\frac{5}{4}aa = xx + ax + \frac{1}{4}aa$. Hæc posterior autem quantitas cùm sit exactum quadratum, cujus radix $x + \frac{1}{2}a$, erit jam $\sqrt{\frac{5}{4}aa} = x + \frac{1}{2}a$, & (utrinq; subtracto $\frac{1}{2}a$) $\sqrt{\frac{5}{4}aa} - \frac{1}{2}a = x$. Habemus igitur nunc regulam, pro dati quanti extremâ & mediâ ratione secandi parte majore x determinanda: nimirum si datum quantum sit linea, v.g. $AB = a$ (*Fig. 58.*) jungitur illi (α) ad angulos rectos sui dimidium $AC = \frac{1}{2}a$; sic erit, per Theor. Pythag. ex Schol. def. XIII, hypotenusa CB, aut ei æqualis CD, = $\sqrt{\frac{5}{4}aa}$, & consequenter ex CD demptâ $AC = \frac{1}{2}a$, reliqua AD, aut huic æqualis AE, erit $= x$, parti majori quæsitæ;

(α) Euclid. 11. Lib. II. & 30. Lib. VI.

prorsus ex Euclidis præscripto, cujus adeò inventionem hoc primum & anticipatum Analyseos specimen ad fontes suos reducit. Pro numeris (tametsi nullus hanc sectionem accuratè admittat) sensus regulæ, quoad rem eodem recidens, hic est: *Addantur quadrata numeri totius ac dimidii, & ex Summa extracta radici* (quæ exactè quidem nunquam haberi potest; cùm sit $\sqrt{\frac{5}{4}}$) *dematur idem dimidius.*

CAPUT V.

De Proportione sive ratione Magnitudinum ejusdem generis in specie.

PROPOSITIO XXVIII.

TRiangula & Parallelogramma, Pyramides item, Prismata & Parallelepipeda, Coni deniq; & Cylindri, singula genera inter se collata, si sint ejusdem altitudinis, habent rationem basium.

Demonstratio.

POtuissent hæc & sequens Prop. subsumptione nudâ præcedenti tanquam consectaria subjici, cùm altitudines in hac, & bases in sequenti, sint efficientes communes, & magnitudines enumeratæ ipsorum facta. Majoris tamen distinctionis ergo eadem specialiùs ita demonstrabimus:

1. Duo-

1. Duorum Triangulorum aut (α) duorum Parallelogrammorum æquales altitudines si dicantur *b*, unius autem basis *a* alterius *ea*; facta hæc erunt *ba* & *bea*, illa ½*ba* & ½*bea*, per Def. XXVIII. Schol. 2.

2. Similiter duorum Prismatum (β) aut Pyramidum æquales altitudines possunt appellari *b*, basiumque ratio pariter exprimi per *a* & *ea*; eruntque Prismata inter se ut *ba* ad *bea*, Pyramides autem ut ⅓*ba* ad ⅓*bea*, per cit. Schol. num. 3.

3. Eadem ratio prorsus est (γ) Cylindrorum & Conorum, quæ Pyramidum & Prismatum, per Consect. 4. Definit. XVII. Atqui

ut *a* ad *ea*, sic est *ba* ad *bea*
= ½*ba* ad ½*bea*
= ⅓*ba* ad ⅓*bea*. Q.E.D.

Consectarium.

ERgo super iisdem vel æqualibus basibus (δ) eadem altitudine existentes ejusdem generis magnitudines sunt inter se æquales & contrà.

(α) Euclid. Prop. 1. Lib. VI.
(β) Prop. 5. 6. Lib. XII. 25. 32. XI. & Consect. loco 30. & 31. ejusd.
(γ) Prop. 11. Lib. XII.
(δ) Prop. 35, 36, 37, 38, 39, 40. Lib. I. & 29, 30, 31. Lib. XI.

PROPOSITIO XXIX.

Super æqualibus basibus existentia Triangula aut Parallelogramma, Pyramides aut Prismata & Parallelepipeda, Coni aut Cylindri, habent rationem altitudinum. (a)

Demonstratio.

Bases ubique possunt appellari *a*, ratio altitudinum ut *b* ad *eb*; Ergo 1. Parallelogramma, Parallelepipeda & Cylindri sunt unum ad alterum sui generis, ut *ba* ad *eba*; Triangula, ut ½*ba* ad ½*eba*; Pyramides & Coni, ut ⅓*ba* ad ⅓*eba*; per Def. 18. Schol. 2. Sed

ut *b* ad *eb*, sic est *ba* ad *eba*
& ½*ba* ad ½*eba*
& ⅓*ba* ad ⅓*eba*. Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

Æqualia (b) *Triangula, Parallelogramma, Prismata, Parallelepipeda, æquales item Pyramides, Coni & Cylindri, habent basi & altitudines reciprocè proportionales.*

Demonstratio.

Nam pro æqualibus Triangulis si ponatur ½*ab*, pro Conis & Pyramidibus ⅓*ab*, pro cæte-

(a) Schol. Prop. 1. Lib. VI. 13. & 14. Lib. XII.
(b) Lib. VI. Prop. 14. 15. Lib. XI. 34. Lib. XII. 11. ejusque coroll. itemque Prop. 15.

cæteris *ab*; sive jam bases æqualium utrorumque ponantur *a*, ut altitudines utrobique sint *b*, sive basis unius sit *a* & *b* altitudo, alterius verò basis *b* & altitudo *a*; erit certè utrobique,

ut *a* ad *a* sic reciprocè *b* ad *b*
bas. prioris — basin post. — alt. post. — alt. prioris.
Vel
ut *a* — ad *b* — sic recipr. *a* ad *b*. Q. E. D.

Consectarium.

ET quarum magnitudinum ejusdem generis reciprocantur ita bases & altitudines, illæ sunt æquales, per Prop. XVIII. Nam factum extremorum est *ab*, & *ba* factum mediorum.

PROPOSITIO XXXI.

QUacunque (a) Triangula, Parallelogramma, Prismata, Parallelepipeda, Pyramides, Coni & Cylindri, singula genera inter se collata, habent rationem compositam ex ratione altitudinum & basium.

Demonstratio.

SIt basis unius *a* & alterius *ea*, altitudo verò illius *b*, hujus *ib*. Erit ergo illud ad hoc
ut *ab* ad *eiab*
vel $\frac{1}{2}$*ab* ad $\frac{1}{2}$*eiab*
vel $\frac{1}{3}$*ab* ad $\frac{1}{3}$*eiab*; h. e. ubiq; ut *a* ad *eia*,
h. e. in ratione composita ex *a* ad *ea* & *b* ad *ib* per Consect. 2. Def. XXXIV. Q. E. D.

(a) Prop. 23. Lib. VI.

Scholion.

POssumus ex hactenus demonstratis non solùm comparatam magnitudinum ejusdem generis quantitatem æstimare, quod attendenti leviter erit facile; sed etiam cum *P. Mourgues* deducere regulam universalem quorumlibet planorum rectilineorum aut solidorum planorum sive planis superficiebus comprehensorum rationem exprimendi per rationem unius lineæ rectæ ad aliam. Cùm enim illa in triangula, hæc in pyramides resolvi possint, datis 1. & resolutis duobus planis rectilineis, super recta quadam linea statuo △ *abc* (*Fig. 59.*) æquale uni ex triangulis alterutrius plani, v. g. *ABC*; deinde ductâ parallelâ *cm*, si △ *BCD* altitudinem eandem haberet cum priore, hujus basi *ab*, adjungerem solùm basin *BC*. Verùm si altitudo *DI* prioris altitudinem superet, e. g. $\frac{1}{5}$, basi *BC* parte sui quintâ adauctæ facio æqualem *bf*, eritque triangulum *bcf* = *BCD*, ac totum *acf* = rectilineo *ABCD*. Quod si ergo alteri rectilineo similiter inter easdem parallelas æquale fecero triangulum aliud *ghi*, erit △ *acf* ad △ *ghi*, h. e. rectilineum *ABCD* ad rectilin. *FGHIK*, ut *af* ad *gh* per Prop. XXVIII. Datis 2. duobus plano-solidis iisque resolutis in pyramides triangulares, possunt hæ transferri inter duo plana parallela, minuendo similiter hîc vel augendo bases triangulares reciprocè pro excessu vel defectu altitudinum, prout suprà circa bases lineares factum erat: Deinde bases illæ triangulares utrobique in unam triangularem basin & consequenter utrumque solidum in unam pyramidem sibi æqualem converti;

quæ

quæ duæ pyramides totales, erunt inter se ut bases triangulares. Et quia porrò basium harum ratio ad rationem duarum linearum potest reduci, per num. 1. hujus; etiam ratio duorum plano-solidorum erit expressa per rationem duarum linearum. Q.E.D.

PROPOSITIO XXXII.

Circuli (a) sunt inter se ut quadrata diametrorum.

Demonstratio.

Sit unius circuli diameter *a*, alterius *b*; erit *per Def. XXXI. Consect. 1.* illius area $\frac{1}{4}eaa$ hujus $\frac{1}{4}ebb$. Sed ut *aa* ad *bb*; sic est $\frac{1}{4}eaa$ ad $\frac{1}{4}ebb$, per Cons. 1. Prop. XIX. Q.E.D.

Consect. 1.

Idem de circulorum sectoribus similibus eodem modo palam erit, dummodo pro partibus peripheriarum ponamus *ia* & *ib*, sicut pro integris aliàs ponimus *ea*, & *eb*: Sic enim area unius erit $\frac{1}{4}iaa$ alterius $\frac{1}{4}ibb$.

Consect. 2.

Cylindri, quorum altitudines æquales sunt diametris suarum basium, sunt inter se ut cubi diametrorum. Nam Cylindri erunt $\frac{1}{4}ea^3$ & $\frac{1}{4}eb^3$, cubi a^3 & b^3.

(a) Euclid. Prop. 2. Lib. XII.

Consect. 3.

Hinc etiam (quæcunque fuerit ratio Sphæræ (a) ad Cylindrum ejusdem diametri & altitudinis, inferius demonstranda, quam interim nomine rationis y possumus notare) Sphæræ, quæ ad se invicem hujusmodi Cylindrorum rationem habent (sc. ut $\frac{1}{4}ea^3$ ad $\frac{1}{4}eb^3$, ita $\frac{1}{4}yea^3$ ad $\frac{1}{4}yeb^3$) habebunt etiam *per Consect. 1.* rationem cuborum, a^3 ad b^3; prout per se quoque ex ipsis his terminis clarum est.

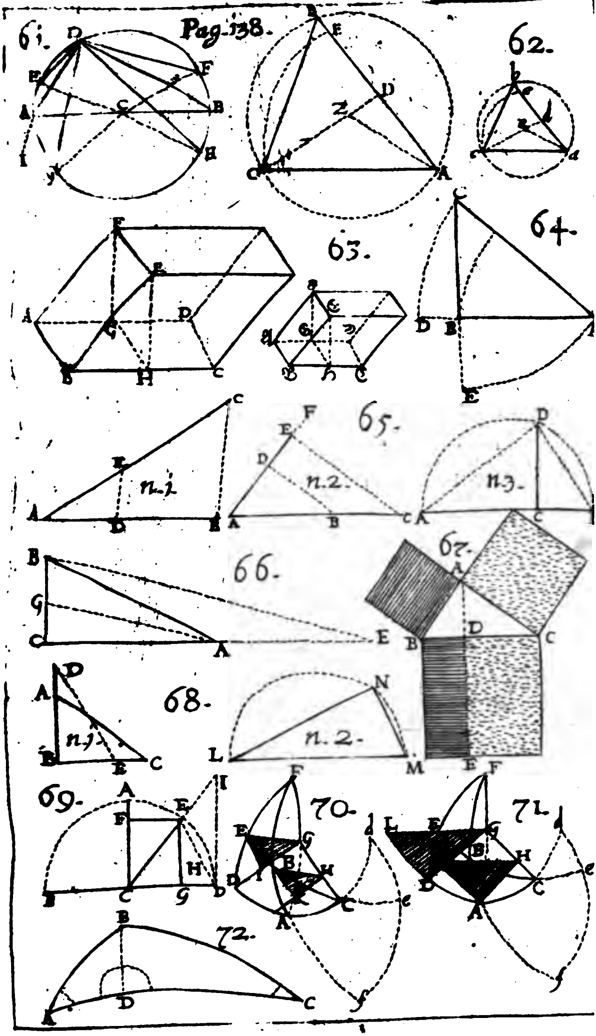
PROPOSITIO XXXIII.

Angulus (β) *ad centrum alicujus circuli constitutus* ACB, (*Fig. 60.*) *est ad angulum in peripheria eidem arcui insistentem* ADB, *ut 2 ad 1.*

Demonstratio.

Veritas hujus effati jam patuit in Schol. Def. X. n. 3. hic tamen aliter & Euclideo more per 3 suos casûs ita demonstratur: In 1. casu conceptâ DE parallelâ cum CB, *per Def. XI. Consect. 1. & 2.* angulus externus ACB = est angulo ADE interno, & angulus BDE æqualis alterno CBD, h. e. alteri ad basin CDB, *per Consect. 2. Def. XIII.* Ergo BDE est ut 1, & CDE

(a) Prop. 18. Lib. XIII.
(β) Euclid. Prop. 20. Lib. III.



Pag. 138.
61.
62.
63.
64.
65.
n. 1.
n. 2.
n. 3.
66.
67.
68.
n. 1.
n. 2.
69.
70.
71.
72.

CDE Hl ex ACB ut 2. In secundo casu totus ECB est duplus totius EDB, & ablatus ECA duplus ablati EDA, *per cas. 1.* Ergo reliquus ACB est etiam duplus reliqui ADB *per Prop. 26.* In tertio casu pars ECA est dupla partis EDA, & pars ECB dupla partis EDB, *per cas. 1.* Ergo & totus ACB totius ADB duplus est. Q.E.D.

Consectaria.

I.

Hinc omnes anguli ADB (α) qui sunt in eodem segmento æquales sunt, & quidem angulus in semicirculo ADB (*Fig. 61.*) rectus est, quia respondens ipsi ad centrum apertura ACB complectitur duos rectos: angulus in minore segmento EDF recto major; quia respondens ad centrum apertura EGHFC comprehendit plusquam duos rectos: angulus denique in majore segmento GDH recto minor; quia ejus duplus ad centrum GCH minor duobus rectis: quæ omnia in Schol. Def. X. n. 6. jam demonstravimus paulò aliter.

2. Omnes tres anguli (β) cujuscunq; Trianguli ABD simul sumpti sunt æquales duobus rectis; quia sunt dimidii trium ad centrum C, qui semper faciunt 4 rectos, *per Def. VIII. Cons. 2.*

3. Ergo externus quilibet IAB, est æqualis

(α) Euclid. Prop. 21. 27. 31. Lib. III.
(β) Prop. 32. Lib. I.

his duobus internis oppositis ad B & D; quia illo, æquè ac hi, cum reliquo sibi contiguo BAD facit duos rectos, *per Cons. 1. ejusd. Def.*

4. Et majus latus trianguli, quia insistit (a) majori arcui circumscripti circuli, necessariò quoque majorem angulum subtendit, *vi Cons. 4. hujus.*

Propositio XXXIV.

I*N æquiangulis triangulis* (ACB & abc Fig. 62.) *latera circum æquales angulos sunt proportionalia*: Nimirum, ut *AB* ad *BC*, sic *ab* ad *bc*, & ut *BC* ad *CA*, sic *bc* ad *ca* &c.

Demonstratio.

DEscriptis enim circulis per vertices utriusque trianguli *juxta Cons. 6. Def. XIII.* propter suppositam angulorum *A* & *a*, *B* & *b*, *C* & *c* æqualitatem, arcûs etiam cognomines *AB* & *ab*, &c. graduum ac minutorum numero necessariò convenient; *vi Prop. XXXIII. antec.* adeoq; & chordæ sive subtensæ *AB* & *ab*, *BC* & *bc* &c. numero particularum radii sive sinûs totius *ZA* & *za*. Quot igitur partes habet *AC* tales, quales *AZ* habet 10000000, totidem habebit etiam *ac* earum, quas habet

az iti-

(a) Prop. 19. Lib. I.

az itidem 1000000 &c. Ergo *AC* est ad *CB* ut *ac* ad *cb* &c. Q.E.D.

Consectaria.

I.

EAdem igitur necessitate triangulorum talium bases *AB* & *ab* suis altitudinibus *CD* ac *cd*, tanquam sinubus rectis arcuum similium *CB* ac *cb*, aut rectiùs *CE* ac *ce* proportionales erunt; adeoque pro ΔΔ. similibus (& consequenter etiam parallelogrammis) rectè supponetur, quòd bases eorum habeant ut *a* ad *ea* & altitudines ut *b* ad *eb*, tametsi non statim contrà, quorum bases & altitudines ita habent, sint habenda pro similibus.

2. Quemadmodum etiam in Parallelepipedis similibus bases habere duplicatam rationem altitudinum facilè constabit attendentibus. Cùm enim similium solidorum plana & æqualia numero & singula singulis similia sint, si pro 𝔄𝔅 (*Fig. 63.*) ponamus *a* & pro 𝔅ℭ *b*, erit AB = *ea* & BC = *eb*, adeoque basis illa ad hanc ut *ab* ad *eeab*. Similiter cùm demissis perpendicularibus EH & 𝔈ℌ triangula EBH & 𝔈𝔅ℌ sint similia, & pro 𝔅𝔈 ponendo *c*, BE sit *ec*, etiam pro 𝔈ℌ ponendo *d*, EH consequenter erit *ed*. Jam verò ratio basis *ab* ad basin *eeab* est duplicata rationis *d* ad *ed per def. 34.* adeoque pro Parallelepipedis similibus rectè supponetur imposterum, quòd bases eorum habeant ut *ab* ad *eeab*, & altitudines ut *d* ad *ed*.

Scho-

Scholion I.

FLuit ex hac Prop. ante omnia *Trigonometriæ planæ pars præcipua de resolvendis* △△ *rectangulis*. Cùm enim in quovis △ rectang. si latus unum, v.g. AB (*Fig. 64.*) sumatur pro sinu toto, alterum BC sit tangens anguli oppositi ad A (similiterque si CB esset S.T. BA foret tangens ang. C;) Sin hypotenusa AC sumatur pro S.T. latus BC fiat S.R. anguli ad A s. arcûs CD ex A descripti, & AB S.R. ang. C. sive arcûs AE ex C descripti (ut de secantibus nihil dicamus, quia iis carere commodè possumus) omnia vi Def. X; ideò reperientur

	I. Anguli
1. Ex hyp. & angulis	Ut crus unum ad alt. sic S.T. ad Tang. ang. alteri cruri opp.
2. Ex latere alterutro & angulis	Ut Hyp. ad S.T. sic crus datum ad S. ang. opp.
	II. LATERA
3. Ex hyp. & lat. alterutro.	inferendo: Ut S.T. ad Hyp. sic S. ang. quæsito cruri oppos. ad ipsum crus.
1. Ex lateribus	Ut S.T. ad crus datum, sic T. ang. huic adjacentis ad crus quæs.
2. Ex hyp. & altero latere	inventis priùs angulis, per 1. vel per Theor. Pythag.
	III. Hypotenusa
1. Ex angulis & alterutro crure	Ut S. ang. cruri dato opp. ad ipsum crus, sic S.T. ad Hyp.
2. Ex datis cruribus.	inventis priùs angulis, per 1. vel per Theor. Pythag.

3. In-

3. Inversè quoque si duo triangula ABC & 𝔄𝔅ℭ (in Fig. Prop. præsentis) habeant angulum unum uni (v. g. B & 𝔅) æqualem, & latera circa hos æquales angulos proportionalia (ut AB ad BC sic 𝔄𝔅 ad 𝔅ℭ) erunt etiam anguli reliqui (A & 𝔄/ C & ℭ) æquales, totaq; triangula similia. (α) Chordis enim AB & 𝔄𝔅/ BC & 𝔅ℭ similibus ex hyp. respondent arcûs cognomines etiam similes h. e. numero graduum & minutorum pares, & his anguli ad peripheriam æquè ac ad centrum æquales.

4 *(Fig. 65. n. 1.)* Si anguli BAC (β) crura secentur linea DE parallelâ basi BC, segmenta crurum erunt proportionalia, nimirum AE ad EC ut AD ad DB; siquidem propter parallelismum linearum BE & BC, triangula ADE, & ABC sunt æquiangula: Ergo ut BA tota ad AC totam, sic AD ablata ad AE ablatam, & consequenter etiam reliqua EC ad reliquam DB, ut ablata EA ad ablatam AD *per Prop. 26.* & alternatim *per Prop. 23.* EC ad EA ut BD ad AD.

Scholion II.

MUltiplex ab hoc Consectario & ejus Prop. dependet Praxis Geometrica. 1. Illa (γ) quâ partem desideratam, e. g. ⅓ à data lineâ AB resecare, atque adeò generaliùs datam AC similiter secare, sicut alia data AB secta in D supponitur, (consequenter in partes æquales quotcunque etiam) doce-

(α) Euclid. Prop. 6. Lib. VI.
(β) Euclid. 2. Lib. VI.
(γ) Euclid. 9. & 10. Lib. VI.

docemur; si nimirum in casu primo, ductâ AF utcunque, sumatur AD ut 1 & DB fiat 2, junctisque CB ducatur parallela DE: Nam ut AD ad DB, sic AE ad EC h. e. ut 1 ad 2, *per hoc Consect. 4.* Ergo AE est $\frac{1}{3}$ totius AC &c.

2. Regula (α) inveniendi datis duabus rectis AB & BC (*n. 2. Fig. 65.*) tertiam (aut datis tribus quartam) proportionalem; si sc. AF ductâ pro lubitu, fiat AD æqualis BC, junctisque DB ducatur parallela EC: Nam ut AB ad BC, sic AD (i. e. BC) ad DE. Quod si ergo AD non sit æqualis BC sed datæ tertiæ alii, erit ex eadem ratione DE quarta proportionalis.

3. Alia regula, (β) inter duas rectas datas AC, CB (*n. 3.*) mediam proportionalem inveniendi; si nimirum ex medio totius AB describatur semicirculus, & ex C erigatur perpendicularis CD. Cùm enim angulus ADB sit rectus *per Consect. 1. præced. Prop.* & ad C duo recti, illi verò ad A & B communes toti △ ADB & partialibus ACD ac BCD; erunt hæc illi, & consequenter inter se quoque, æquiangula & similia: Ergo *per Prop. præsentem* ut AC ad CD sic CD ad CB, q. e. d. Sicut etiam sunt, ut AB ad BD, sic BD ad BC, & ut AB ad AD, sic AD ad AC &c.

4. Praxis Analytica multiplicandi & dividendi lineas per lineas, ut productum seu quotus sit linea; item ex lineis extrahendi radices: quam tradit Cartes. Geom. p. 2. Nimirum assumpta certâ quadam lineâ pro unitate, v. g. AB (*in Fig. 65. n. 2.*) si AC multiplicanda esset per AD, junctis BD, & ductâ

(α) Euclid. 11. & 12. Lib. VI.
(β) Euclid. 13. Lib. VI. Et unà Euclid. VIII. Lib. VI.

& ductâ parallelâ CE, productum foret AE; (esset enim, ut 1 ad multiplicantem AD, sic Multiplicanda AC ad AE productum;) aut, si dividenda esset AE per AC, junctis EC & ductâ parallelâ BD, quotus foret AD; (esset enim AC divisor ad AE dividendum, ut unitas AB ad AD quotum;) omnia, ex natura Multiplicationis ac divisionis & praxium præcedd. Quemadmodum etiam, assumptâ GB (ead. Fig. 3. num.) pro unitate, si radix veniat extrahenda ex alia quacunque lineâ AC, junctâ hac unitati in lineam unam AB & circa hanc descripto semicirculo, erecta perpendicularis CD foret radix quæsita, utpote *media* proportionalis inter duas extremas CB & AC *juxta Prop. XVII.*

5. Quæ angulum datum A (a) quemcunque bifariam dividit recta AG (*Fig. 66.*) prolongata dividit basin BC proportionaliter anguli cruribus AB & AC. Nam prolongatâ CA in E, ut AE sit = AB; erunt anguli ABE & AEB æquales per Consect. 2. Def. XIII. adeoque æquales etiam singulis medietatibus externi GAB, *per Consf. 3. Prop. anteced.* Ergo lineæ AG & EB erunt parallelæ *per Consect. 1. Definit. XI.* Ergo ut AC ad AE h. e. ad AB, sic GC ad GB per Consect. 3. hujus. Q. E. D.

6. Hinc verò sequitur ulteriùs, per Conversionem illationis ultimæ, ut AC † AB ad AC, sic GC † GB (i. e. BC) ad GC; & inversè GC ad BC ut AC ad AC † AB; & alter-

K nátim

(a) Euclid. 3. Lib. VI.

natim denique GC ad AC, ut BC ad AC†AB.

Scholion III.

Nimitum ex his duobus proximis consectariis duæ vel tres nobis subnascuntur regulæ practicæ, quarum 1. docet, *datis cruribus AB & AC, itemque basi BC, invenire hujus segmenta GC & GB per anguli intercruralis bisectionem facta;* ita nimirum inferendo secundùm Cons. 6: Ut Summa laterum ad latus unum (v. g. AC;) sic Summa segmentorum, i. e. tota basis, ad segmentum unum, nempe lateri dicto vicinum GC. 2. Docet econtrà, *datis basi ejusque segmento uno & prætereà laterum summâ, invenire separatim latus AC segmento isto vicinum;* inferendo nimirum: Ut segmentorum Summa, sive basis BC, ad Summam laterum, sic segmentum datum GC ad latus quæsitum AC; vel etiam 3. *datâ solùm basi & laterum summâ,* non verò segmento GC, *hujus tamen rationem ad latus vicinum AC exprimere;* scil. ipsis quantitatibus datorum terminorum, ponendo vi Cons. 6. pro GC valorem baseos BC & pro AC valorem Summæ AB† AC: cujus ultimæ regulæ infrà in Cyclometria Archimedis insignis elucebit utilitas.

7. In quocunque triangulo ABC (Fig. Prop. præsentis) Latera sunt ad se invicem, ut sinûs oppositorum singulis angulorum. Sunt enim ut chordæ angulorum ad centrum duplorum vi *Prop. 33.* Ergo sunt etiam inter se ut chordarum dimidia, h. e. *per Def. 10,* ut sinûs angulorum dimidiorum.

Scholion IV.

FLuunt hinc duæ novæ regulæ *Trigonometriæ plane circa Triangula obliquangula*, ad inveniendum scil.

		I. *Angulos reliquos*
Ex datis lateribus duobus & angulo uni horum opposito	inferendo	Ut latus angulo dato oppositum ad latus alterum, sic Sin. anguli dati ad Sin. anguli alteri lateri oppositi; quo dato tertius non ampliùs potest latere.
		II. *Latera reliqua*
Ex dato uno & angulis.		Ut Sin. anguli dato lateri oppositi ad ipsum hoc latus; sic Sin. anguli quæsito lateri opp. ad ipsum quæsitum latus.

Ut hoc pacto Trigonometriæ planæ casûs omnes, & consequenter *Euthymetriam* totam, ad fundamenta sua reduxerimus (Nam ex datis duobus lateribus & angulo interjacente reliqua inveniemus per resolutionem trianguli obliquanguli in duo rectangula, adeoque per regulas in Schol. I. deductas) excepto unico, quo ex tribus lateribus obliquanguli datis omnes anguli inveniuntur; cujus resolvendi regulam infrà Prop. XLV. Consect. 2. ex eo Theoremate deducemus, quod est apud Euclid. Lib. II. Propos. XIII.

8. Quia est in △ Rectangulo BAC (*Fig 67.*) ut BC ad CA, sic CA ad CD per n. 3. Schol. II. hujus; erit □ CA = ▭ CE, *per Prop. XVII.* Similiterque, quia est ut CB ad BA, sic BA ad BD; erit □ BA = ▭ BE: Quare

re duo Rectangula BE & CE simul, h. e. □ Hypotenusæ BC, erit æquale duobus quadratis BA & CA simul sumptis; quod quidem est ipsissimum Theorema Pythagoricum in Schol. Def. XIII. quoq; aliâ, & gemina quidem, demonstratione confirmatum.

Scholion V.

HOc verò Pythagoricum Theorema, uti regulas suppeditat, vel addendi quadrata plura in unam summam, vel unum ab altero subtrahendi; sic fundamenta quædam subministrat juxta cum Prop. hujus primaria, quibus inter cætera Structura Tabb. Sinuum &c. quarum usum ex parte Schol. I. & IV. docuimus, innititur. Nimirum 1. si plura quadrata in unum sint colligenda, junctis in angulum rectum lateribus duorum e.g. AB & BC, (*Fig. 68. n. 1.*) ducta hypotenusa AC est latus quadrati utrisque æqualis; & si hæc hypot. AC ex B ponatur in D, ac latus tertii quadrati ex B in E, nova hypotenusa DE est latus quadrati æqualis tribus prioribus simul sumptis. 2. Si quadratum lateris MN (*n. 2.*) esset subtrahendum ex quadrato lateris LM, descripto super hoc semicirculo, & altero illo ex M applicato intra semicirculum, ducta LN est latus quadrati residui. 3. Dato (*Fig. 69.*) sinu recto EG alicujus arcûs ED (quo pacto verò primarii aliquot sinûs inveniantur, alio loco demùm doceri potest) haberi potest Sinus complementi CG vel EF, *per num. præced.* subtracto nempe □ sinûs dati è □ radii; & porrò sinus versus GD, subtracto sinu complementi CG ex radio CD. 4. Sinûs versi GD & sinûs recti EG, quadrata in summam collecta, dant □ subtensæ ED ejusdem arcûs,

cus, (*omnia per Theorem. Pythagor.*) & hujus dimidium EH Sinum Rectum arcûs dimidii. 5. Ex sinu recto EG, habebitur ejusdem arcûs tangens, si fiat: Ut sinus complementi CG ad sinum Rectum GE, sic S. Tot. CD ad Tangentem DI. 6. Denique ex his datis etiam secantes habentur (siquidem desiderati fuerint) inferendo: Ut Sin. Compl. CG ad Sin. Tot. CE; sic S.T. CD ad secantem CI; vel: ut Sin. R. EG ad Sin. Tot. EC, sic Tangens ID ad secantem IC; utraq; per ipsam nostram Prop. 34.

Consect. 9. Si quadrans circuli (CBEG *Fig.* 70.) ad quadrantem alium (CADG) fuerit inclinatus, & utrumque secent alii duo perpendiculares (FBAG & FEDG, & posterior quidem in utriusque extremis;) demissis è sectionibus communibus E & B perpendicularibus per plana perpendicularium & inclinati (hîc nempe EG & BH tanquam sinibus rectis segmentorum EC & BC; ibi verò EI & BK, tanquam sinibus rectis segmentorum ED & BA) prodibunt duo triangula EIG & BKH, ad I & K rectangula, ad G & H æquiangula (propter eandem inclinationem plani CBEGC) adeoque prorsus similia, *per Prop. nostram XXXIV*; ejusdemque adeò virtute erunt, ut sinus EG ad sinûm EI sic sinus BH ad sinum BK, vel ut EG ad BH, sic EI ad BK, & contrà.

Scholion VI.

HInc regulæ plures *Trigonometriæ Sphaericæ*, pro resolvendis △△ rectangulis. 1. Datis in △

K 3 rect.

(a) Lansberg. Geom. Triang. Lib. IV. Prop. 12.

rectangulo ABC, hypotenusâ BC & angulo obliquo ACB, pro crure huic opposito AB, fiet, *ut Sin. T.* (EG) *ad Sin. Hyp.* (BH) sic *sinus anguli dati* (EI) *ad sinum cruris quæsiti* (BK.) 2. Datis Hypotenusâ BC & crure AB, pro angulo opposito ACB fit, *ut Sin. Hypot.* (BH) *ad S. T.* (EG) *sic sinus cruris dati* (BK) *ad sinum anguli quæsiti* (EI.) 3. Dato latere AB & angulo eidem opposito ACB pro Hypotenusa BC (modò sciatur an quadrante major an minor sit) fit, *ut sinus anguli dati* (EI) *ad sinum T.* (EG) *sic sinus cruris dati* (BK) *ad Sin. Hypoten.* (BH.) 4. Datis in △ Rectangulo EBF (quod assumimus loco ABC, ne figura mutanda sit) crure uno EB & Hypotenusâ BF, pro crure altero EF invenietur ejus complementum, si fiat: *Ut sinus Complementi lateris dati* (BH) *ad S. T.* (EG) *sic sinus complem. hypotenusæ* (BK) *ad Sin. Complem. lateris quæsiti* (EI.) 5. Dato utroque latere EB & EF, pro Hypotenusa BF invenitur ejus complementum BA, inferendo: Ut S. T. (EG) est ad unius lateris (EB) complementi sinum (BH) sic alterius lateris (EF) complementi sinus (EI) ad (BK) sinum complementi Hypotenusæ. 6. Datis in eodem △ rectangulo EBF crure uno EF & angulo eidem adjacente EFB, pro altero angulo obliquo EBF, prolongantur *primò* ad quadrantes integros BA in *f*, ut A*f* sit = BF hypot. BC in *e*, ut C*e* sit = EB, & AC in *d*, ut C*d* sit = DA mensuræ anguli dati EFB; *secundò* ex *d* per *e* & *f* demittitur quadrans per extremitates quadrantum B*f* & B*e*, ut sic △C*de* proveniat rectangulum, in quo dantur hyp. C*d* = angulo dato, & angulus C = complemento cruris

dati

dati (nempe arcui ED) quæriturque adeò tertitus *de*, tanquam complementum arcûs *ef* anguli quæsiti ABC vel EBF; nimirum per fum hujus inferendo:

Ut S. T. ad Sin. Hyp. *cd* (h. e. ang. dati EF sic ang. *dce* (h. e. DE compl. cruris dati EF Sin. *de* (tanquam compl. anguli *fBe* vel EBF.

7. Datis, in eodem, latere EF & angulo o fito EBF, (h. e. arcu *ef*) pro angulo reliquo E (h. e. hypot. *cd* in △*cde*) fiat per 3. hujus:

Ut Sin. ang. *dce* (h. e. Sin. Compl. cruris dati —ad S. T. fic finus cruris *de* (h. e. Sin. Compl. EBF) ad hyp. *cd* (h. e. Sin. arcûs DA vel EFB.)

8. Datis angulis obliquis pro latere alterutro EF, fic infertur, per 2. hujus:

Ut Sin. hyp. *cd* (h. e. Sin. ang. ad F) ad —fic Sinus *de* (h. e. Sin. Compl. ang. ad B Sin. ang. *dce* (h. e. Sin. Complem. lat. qu EF.)

Consect. 10. Iisdem datis quæ in Confe fi loco finuum rectorum EI & BK per dicularitur erigantur DL & AM (*Fig.* propter △△ DGL & AHM fimilitudin erunt, ut DG Sin. T. ad DL Tang. DE, fic AH Sin. R. arcûs AC ad AM T arcûs AB; vel ut DG ad AH, fic DL ad & contrà.

Scholion VII.

Hinc cæteræ regulæ Trigonometriæ Sphæric refolvendis △△ rectangulis; nempe 9

to latere AC in △ ABC & angulo adjacente ACB, pro latere altero AB, fit, ut Sin. T. (DG) ad Sin. lateris dati, (AH) sic Tang. anguli dati (ACB) ad Tang. quæsiti (AB.) 10. Dato latere (AB) & angulo opposito (ad C) pro latere altero (AC, modò constet, quadrante majus sit an minus) fit, ut Tangens anguli dati (DL) ad Tang. cruris dati (AB) sic S. T. (DG) ad Sin. cruris quæsiti (nempe ad AH.) 11. Dato utroque latere, pro angulis, fit, ut Sin. unius lateris (AH) ad S. T. (DG) sic T. alt. lat. (AM) ad Tang. anguli eidem oppositi (ad C.) 12. Datis porrò in △ Rect. EBF, hypotenusâ (BF) & angulo (EFB), pro latere adjacente (EF) fit, ut Sin. Compl. anguli dati (AH) ad S. T; sic Tangens Compl. Hypoth. (AM) ad Tang. Compl. cruris quæsiti (DL.) 13. Dato latere (EF) & angulo adjacente (F) pro hypotenusa (BF) fit; ut S. T. ad Sin. Compl. ang. dati (AH) sic Tang. Compl. cruris dati (DL) ad Tang. Compl. hypot. (AM.) 14. Datis hypot. (BF) & latere uno (EF) pro angulo adjacente (F;) fit ut Tangens Compl. cruris dati (DL) ad S. T. sic Tang. Compl. hypot. (AM) ad Sin. Compl. anguli quæsiti (AH.) 15. Datis hypot. (BF h. e. arcu *Af* sive angulo ad *d*) & angulo obl. alterutro (ad F) pro altero angulo (EBF) fit ope novi trianguli *cde*, per 12. hujus:

Ut Sin. Compl. ang. *cde* (h. e. Sin. compl. hypot. (AH) ad S. T. sic Tang. complem. hyp. *cd* (h. e. T. compl. ang. dati) ad Tang. compl. lateris *de* (h. e. ad Tang. anguli quæsiti ABC vel EBF.)

16. Datis angulis obliquis pro hypot. (BF, sive arcu *Af* sive angulo *cde*) per 14. hujus fit;

Ut

Ut Tang. complem. cruris *de* (h. e. Tang. anguli ABC vel EBF) ad S. T. sic T. compl. hyp. *cd* (h. e. T. compl. ang. alterius EFB) ad Sin. Complem. ang. *cde* (h. e. ad Sin. Compl. Hyp. BC quæsitæ.)

Ut hoc pacto Trigonometriæ Sphæricæ casûs omnes circa triangula rectangula, cum Lansbergio (sed multò compendiosiùs spero) scientificè resolverimus, obliquangulorum resolutione solâ nunc restante.

Consect. 11. In triangulis Sphæricis obliquangulis æquè ac rectangulis sinûs angulorum sinibus oppositorum laterum directè proportionales sunt. 1. De rectangulis res patet ex num. 3. Schol. VI. atque adeò ex *ipso Cons.* 9. siquidem, ut Sin. ang. A (*Fig.* 72.) ad Sin. BD, sic S. T. (h. e. ang. D) ad Sin. AB, similiterque Sin. ang. B ad Sin. AD, sic S. T. (h. e. ang. D) ad Sin. AB. 2. De obliquangulo ABC in duo rectangula resoluto eadem veritas statim elucescit. Est enim

Sin. ang. A ad Sin. BD ut Sin. ang. D ad Sin. AB; pariterque

Sin. ang. C ad Sin. BD ut Sin. ang. D ad Sin. BC, per 1.

In utraque proportionalitate Media sunt Sin. BD & D; Ergo Facta extremorum Sin. AB in Sin. A, & Sin. BC in Sin. C, erunt æqualia inter se, cùm facta mediorum eorundem sint æqualia, per Prop. XVIII. Ergo per Prop. XIX, ut Sin. A ad Sin. BC, sic Sin. C ad Sin. AB. Q. E. D.

Scholion VIII.

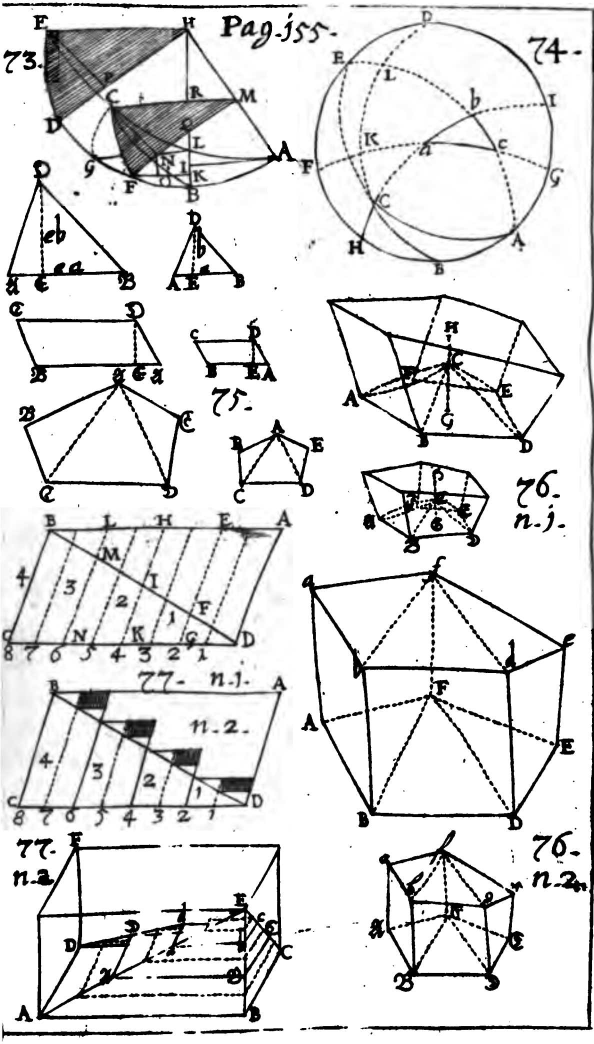
POsterius de obliquangulis hoc etiam modo constaret, cùm Sin. ang. *A* sit ad Sin. *B D* ut Sin. ang. *D* ad Sin. *A B*, sit primus *a*, secundus *e a*, tertius *b*, quartus *e b*; & quia Sin. anguli *C* (quem vocabimus *c*) pariter est ad Sin. *BD* (h. est ad *e a*) ut Sinus *D* (h. est *b*) ad Sinum *BC* (qui consequenter erit $\frac{eab}{c}$;) manifestum erit.

Sin. ang. *A* esse ad Sin. *BC* ut Sin. ang. *C* ad Sin. *AB*
h. e. a — ad $\frac{eab}{c}$ h. e. c ad eb.

multiplicando extrema & media, quorum facta utrobique sunt *e a b*. Sicut igitur vi præsentis & superioris 7. Consect. universaliter nunc verum est; *In quolibet triangulo, sive rectilineo sive Sphærico; sive rectangulo sive obliquangulo, latera vel eorum sinûs se habere ad invicem, ut sinus angulorum oppositorum* (quod ideò Theorema commune vocari solet:) ita hinc fluunt duæ novæ regulæ Trigonometriæ Sphæricæ circa triang. obliquangula, illis quas Schol. IV. invenimus simillimas. Ad inveniendum sc.

Ex datis lateribus duobus & angulo uni horum opposito	inferendo	*I. Angulos reliquos.* Ut Sin. lateris ang. dato oppositi ad Sin. alt. lateris, sic Sin. anguli dati ad Sinum quæsiti.
Ex dato uno & angulis		*II. Latera reliqua.* Ut Sin. ang. dato lateri oppositi ad Sin. ipsius hujus lateris, sic Sin. ang. quæsito lateri oppos. ad Sin. lateris quæsiti.

Atque


Pag.155.
73.
74.
75.
76. n.1.
77. n.1.
n.2.
77. n.2.
76. n.2.

Atque hoc pacto omnes casûs regulasque Trigonometriæ Sphæricæ quoque ad fontes suos reduximus. (Nam ex datis duobus lateribus & angulo interjacente, duobus angulis & latere adjacente, etiam reliqua inveniemus in obliquangulis per resolutionem eorum in duo rectangula, adeoque per regulas in Schol. VI. & VII. deductas,) exceptis duobus casibus, cùm ex tribus lateribus anguli, vel ex tribus angulis latera investigantur; quorum resolvendorum regulas nobis suppeditabit sequens.

Consect. 12. Dati trianguli Sphærici obliquanguli ABC, (*Fig.* 71.) cujus latera inæqualia & sigillatim quadrante minora, productis lateribus AB & AC ad quadrantem AD, AE, factisq; cæteris ex figura conspicuis, erunt

Arcus DE mensura ang. A	AI. Sin. R. lat. AB
AF = AC, & sic FB differentia laterum AB & AC	CM. Sin. lat. AC
BC = BG, & sic GF differentia lateris tertii BC & reliquorum differentiæ FB.	GL Sin. GB vel lateris BC
Jam verò 1. ut EH vel DH ad CM vel FM, sic PH ad NM (propter ΔΔ EPH & CNM æquiang.) Ergo per Propos. 26. sic etiam DP ad FN. Sint ergo DH = *a*, FM = *ea*, DP = *b*, FN = *eb*.	FK Sin. R. arcûs FB
	BI Sin. versus AB
	BL Sin. versus GB vel BC
	BK Sin. versus FB
	KL vel NO differentia Sinuum versorum modo dictorum.
	EP Sin. Rect. & DP Sin. versus arcûs DE

2. Pro-

2. Propter △△ FNO & HAI æquiangula (est enim FNO æquiangulum △FKQ & hoc △HQM, propter angulos ad Q verticales; & hoc porrò △ HAI propter ang. ad H communem) est etiam

CN Sin. R. & FN Sin. versus arcûs FC.

Ut HA
sive DH ad AI sicut FN ad NO
a — *oa* — *rb* — *oeb*.

Quare nunc 3. erit quoque evidenter
□ DH ad FM in AI ut DP ad NO
aa — *oeaa* — *b* — *oeb*.
h. e. *a* ad *oea* — *b* ad *oeb*.
DH NO DP.
& inversè *oea* ad *a* sic *oeb* ad *b*.

Scholion IX.

Cùm igitur notus sit radius DH vel *a*, & nota NO differentia sinuum versorum BL & BK, patet DP sinum versum anguli A non posse ampliùs latere, modò nota sit quoque prima quantitas *oea*. Hæc autem habetur per aliam illationem præcedaneam, si fiat

Ut AH ad FM sic AI ad quartum *oea*.
a *ea* *oa*

Nascitur igitur hinc 1. Regula: *Datis tribus lateribus obliquanguli Trianguli, inveniendi angulum quemvis e. g. ad A; inferendo nim.*

I. Ut Sin. T. ad Sin. R. unius lateris comprehendentis AC; sic Sin. alt. lat. AB ad quartum.
DH vel AH — FM — AI — *oea*
a — *ea* *oa*

II. Ut

II. Ut Quartum, hoc — ad Sin. T. sic Differentia Sin. versorum lateris tertii BC & differentiæ reliquorum ad Sin. vers. anguli quæsiti, nempe

oca — *a* — NO — DP
ocb *b*.

Quandoquidem autem trianguli Sphærici latera in angulos, & contrà, permutari possunt, continuatis lateribus [ut si trianguli dati ABC, (*Fig.* 74.) latus AB in circulum, reliqua in semicirculos ACE, BCD continuentur ex polis *b* & *c*, porroque ex polo A semicirculus HI, & ex polo B semicirc. FG, & ex polo C semicirc EA; habebitur novum triangulum *a, b, c*, cujus tres anguli æquales erunt tribus lateribus prioris ABC; siquidem angulus *a* seu ejus mensura IG est æqualis lateri AB, utpote cum arcu tertio AG quadrantem facientibus utrisque; anguli *b* verò mensura est ipsum latus AC (in hoc casu sc. quo latus AC est quadrans, in alio, quo esset quadrante minus vel majus, foret mensura anguli complem. tunc enim semicirculus ex polo A descriptus H *ab*, non transiret per C, sed ultra vel citra C; Vid. Pitisc. Lib. I. Prop. 61. p. m. 25.) angulus *c* seu ejus mensura KL est æqualis lateri BC, quia cum eodem tertio KC quadrantes BK & CL conficiunt] igitur 2. *Datis tribus angulis obliquanguli trianguli abc invenietur latus quodcunque* e. g. *ac*, si quæratur angulus ABC, aut potiùs hujus complem. KBF, vel hujus mensura FK = *ac*, ex datis tribus lateribus △ ABC, per reg. præced. inferendo sc.

I. Ut S. T. ad Sin. R. unius lateris angulum comprehendentis AB, (h. e. unius ang. *a* quæsito lat.

que, sunt itidem proportionales, & contrà; quia, si rationes linearum simplæ sunt eædem, earum etiam duplicatæ eædem erunt, & vicissim.

Scholion.

Quemadmodum autem hoc secundum Consect. confirmat Prop. XXII. ejusque Scholion; ita primum nobis parit geminam praxin geometricam: 1. Figurarum similium proportionem duabus lineis rectis exprimendi, si ad ipsarum homologa latera inveniatur tertia proportionalis. Sicut enim latus primæ ad hanc tertiam, ita figura prima ad secundam. 2. Figuram quamvis datam augendi vel minuendi in proportione data; si nimirum inter latus figuræ datæ quodvis, aliamque lineam, quæ ad illud habeat rationem datam, inveniatur media proportionalis, & super hac describatur figura similis.

PROPOSITIO XXXVI.

Similes figuræ solidæ habent ad se invicem rationem triplicatam homologorum laterum.

Demonstratio.

Nam 1. duorum similium Parallelepipedorum (& consequenter etiam Prismatum ac Cylindrorum per Consect. 4. & 5. Def. XVI, itemque Pyramidum & conorum vi Consf. 3. & 4. Def. XVII.) bases simi-

similes sunt, ut *ab* ad *eeab* per (*a*) Prop. anteced. & altitudines ut *c* ad *ec* per Consect. 2. Prop. XXXIV. Ergo Parallelepipeda, Cylindri & Prismata (horumque adeò partes tertiæ quoque, Coni & Pyramides) erunt ut *abc* ad *e³abc* per Conf. 3.4. & 5. Defin. XVI. h. e. habebunt per Def. 34. & Conf. 1. ac 2. Prop. 34. perpendiculorum vel laterum homologorum rationem triplicatam: quod est unum, in cubis maximè conspicuum, qui, ponendo *a* pro latere unius, & *ea* pro latere alterius, sunt ad se invicem, ut *a³* ad *e³a³*.

2. Polyedra similia resolvuntur in Pyramides similium basium & altitudinum; id quod de regularibus clarum ex Consect. Def. XXI. de irregularibus autem non adeò obscurum esse potest; siquidem totas altitudines similium polyedrorum æquè ac similium parallelepipedorum per Consect. 2. Prop. 34. in subduplicata ratione basium esse, pares ubique planorum similium & numero æqualium inclinationes postulant, adeoque his similiter divisis in C ac 𝔈 (*Fig. 76. n. 1.*) partes altitudinum GC & 𝔊𝔈 eandem rationem habent: Unde v. g. duæ pyramides existentes super bases ABDEF & 𝔄𝔅𝔇𝔈𝔉 similes, sub altitudini-

(*a*) Euclid. Prop. 12. Lib. XII de Conis & Cyl.

parallelogrammi, simul utrinque sumpta, h. e. ipsum triangulum ad parallelogrammum, est ut 1 ad 2. Q.E.D.

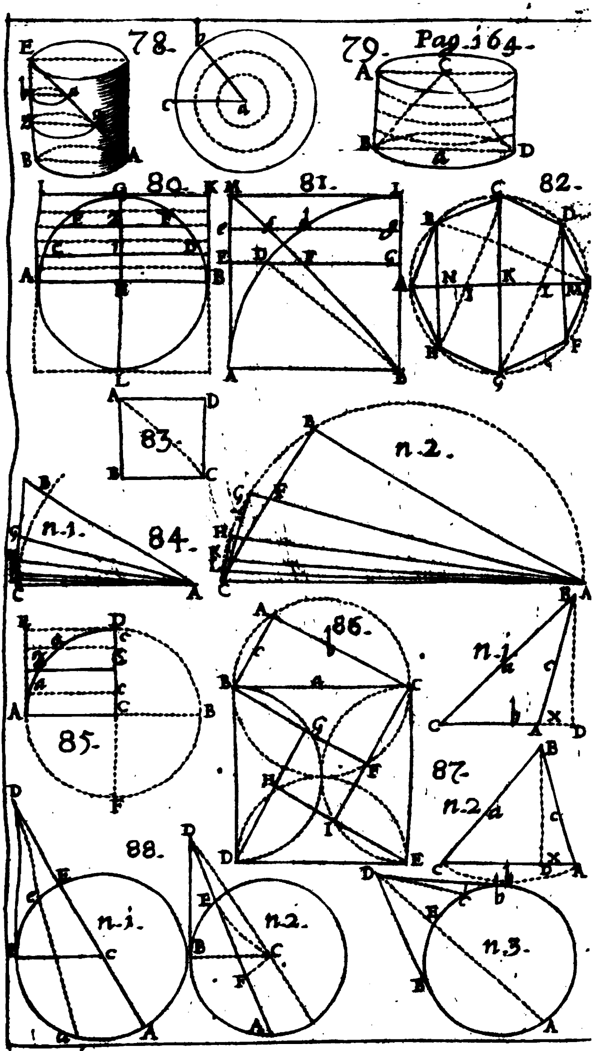
Scholion.

QUod si quis ambigeret, an rectè possit dici triangulum aut parallelogrammum ex infinitis lineis indivisibilibus constatum, is poterit pro lineis cum *Clarissimo Wallisio* parallelogrammula ejusdem, sed infinitè-parvulæ altitudinis concipere, & res perinde succedet. Nam sectâ basi (*n.2.*) in partes 4 æquales per transversas parallelas, circumscribentur triangulo totidem parallelogramma æque-alta, habentia adeò rationem basium per Prop. 28. h. e. in progressione Arithmetica crescentia: In bisectione autem sequente orientur parallelogramma octo talia ad triangulum ipsum propiùs accedentia, in secunda 16 &c. ut tandem infinita talia infinitiès minoris altitudinis, in ipsum triangulum desinentia, constituant seriem arithmeticè progressionalium infinitam, non à 0 sed ab 1. incipientem, quibus respondent in parallelogrammo infinita ejusdem altitudinis parallelogramma maximo omnium æqualia. Sequitur ergo iterum, per Consect. 9. Prop. XXI. seriem illam ad hanc, h. e. Triangulum ad parallelogrammum esse ut 1 ad 2; id quod hîc semel monitum casibus similibus imposterum facilè applicabitur.

Consectaria.

I.

CÙm in circulo similiter (*Vid. Fig. 79.*) peripheriæ æqualibus intervallis remotæ, tan-


Pag. 164.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
n.1.
n.2.
85.
86.
87.
n.1.
n.2.
88.
n.1.
n.2.
n.3.

tanquam elementa circuli, crescant progressione arithmeticâ; erit Summa horum elementorum, h. e. ipse circulus ad Summam totidem maximæ peripheriæ æqualium, h. e. ad superficiem cylindricam, cujus basis est ipsa peripheria maxima, altitudo autem semidiameter, ut 1 ad 2.

2. Hinc superficies curva cylindri sphæræ circumscripti, h. e. cujus altitudo æquatur diametro, est baseos ipsius quadrupla.

3. Similiter sector circuli bac, ad superficiem cylindricam, cujus basis est arcus bc, altitudo verò semidiameter ac, est ut 1 ad 2.

4. Et quia superficies coni BCD est ad basin circularem, ut BC ad CA h. e. ut $\sqrt{2}$ ad 1 per Schol. Prop. XVII; erunt superficies cylindrica, conica, & circularis hactenus memorata, ut 2, $\sqrt{2}$ & 1, adeoque continuè proportionales.

Scholion.

Quæ omnia hoc etiam modo patere possunt ex abundanti: Ponendo pro circuli diametro a, semid. $\frac{1}{2}a$ & circumferentia ea, habebitur area circularis $\frac{1}{4}eaa$ per Consect. 1. Def. 31. & altitudine cylindri AB h. e. $\frac{1}{2}a$ in peripheriam ea ductâ, habebitur superficies cylindrica $\frac{1}{2}eaa$, vi Consect. 6. Def. 18. ut nunc pateant Consect. hujus 1, 2 ac 3. Jam si quæramus etiam coni superficiem, cùm latus ejus vi Theorem. Pythag. sit $\sqrt{\frac{1}{2}aa}$, hujusque dimidium $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}aa}$ h. e. (per n. 2. Schol. Prop. XXII.)

 $\sqrt{\frac{1}{8}aa}$

$\sqrt{\frac{1}{8}aa}$; hoc dimidio multiplicato in peripheriam baseos ea, habebitur (vi Confect. 4. Defin. 18.) superficies Coni $ea\sqrt{\frac{1}{8}aa}$ h. e. (per modò cit. Schol.) $\sqrt{\frac{1}{8}eea^4}$: ut nunc pateat etiam Confect. hujus 4tum; siquidem factum illorum extremorum $\frac{1}{2}eaa$ & $\frac{1}{4}eaa$ est $\frac{1}{8}eea^4$, æquè ac quadratum hujus medii.

PROPOSITIO XXXVIII.

Parallelepipedum (a) *BF* (*Fig. 77, n. 3.*) *est ad Pyramidem ABCDE super eadem basi BD & ejusdem altitudinis, ut 3 ad 1.*

Demonstratio nova rei jam certæ ex Confect. 3. Def. XVII.

POnatur enim 1. tota altitudo BE divisâ in tres partes æquales, per plana transversa basi parallela, eruntque (propter Pyramidum $abcd$E, 𝔄𝔅ℭ𝔇E & ABCDE similitudinem) bases $abcd$, 𝔄𝔅ℭ𝔇, & ABCD per Confect. 2. Prop. 34. Confect. 3. Def. XVII. in ratione duplicata altitudinum, h. e. in progressione arithmeticâ duplicatâ 1, 4, 9; Porròque 2. bisectis altitudinis partibus, sectiones quadrangulæ jam duplo plures, (tanquam indivisibilia sive elementa propositæ Pyramidis) ut 1, 4, 9, 16, 25, 36 &c. in infinitum, semper in pro-

(a) Euclid. Prop. VII. coroll. Lib. XII.

progressione arithmeticâ duplicatâ; cùm interim eisdem respondeant totidem in parallelepipedo elementa maximo ABCD æqualia. Quare per Consect. 10. Prop. XXI. Omnia indivisibilia Pyramidis ad omnia indivisibilia Parallelepipedi, utrinque simul sumpta, h. e. ipsa Pyramis ad Parallelepipedum, est ut 1 ad 3. Q. E. D.

Consectarium.

FAcilè verò tota demonstratio accommodabitur quoque aliis Pyramidibus & Prismatibus, itemque Conis ac Cylindris, (a) quandoquidem hîc etiam (*Fig. 78.*) plana circularia *ba*, 𝔅𝔄 & BA, sunt ut quadrata diametrorum, adeoque ut 1, 4, 9, similiterque per bisectiones continuatas omnia alia Coni elementa in progressione arithmetica duplicata; cùm interim eisdem in Cylindro respondeant elementa totidem maximo BA æqualia &c.

PROPOSITIO XXXIX.

CYlindrus est ad Sphæram sibi inscriptam, h. e. ejusdem baseos & altitudinis, ut 3 ad 2.

Demonstratio.

POnatur enim 1. (*Fig. 80.*) dimidia altitudo GH (nam quæ de cylindro dimidio

(a) Euclid. Prop. 10. Lib. XII.

midio AK & hemisphærio AGB demonstrata fuerit proportio, eadem erit totius cylindri ad totam sphæram) divisa in 3 partes æquales, erunt AH, C1, E2, mediæ proportionales inter segmenta diametri per Prop. XXXIV. Schol. II. n. 3. atque adeò per Prop. XVII. rectangula LHG, L1G, L2G æqualia quadratis AH, C1, E2, habituris ordine, ut 9, 8 & 5; pariterque 2. bisectis prioribus portionibus altitudinis, quadrata sex transversim sphæram secantia reperiuntur esse, ut 36, 35, 32, 27, 20, 11 &c. in ea progressione, quæ pluribus exposita est in Consect. 12. Prop. XXI. Quamobrem, cùm indivisibilia hemisphærii omnia, nempe plana circularia quadratis dictarum transversarum respondentia, eandem habeant progressionis rationem, per Prop. 32. iisdemque interim in cylindro respondeant totidem elementa maximo AH æqualia; hæc omnia simul sumpta ad illa omnia etiam simul sumpta, h. e. cylindrus totus AK ad totum hemisphærium AGB, vi allegati Consect. 12. erit ut 3 ad 2, (a) Q. E. D.

Scholion I.

ELeganter hanc nostram propositionem à priori, methodo geneticâ, deducit *Honoratus Fabri* in Syno-

(a) Archim. 32. (al. 31.) Lib. I. de Sphæra.

Synopsi Geom. p. 318. (quod idem ex eodem communi fundamento præstat *Carolus Renaldinus* de Resol. & Compos. Lib. I. p. 301. seq. sed obscuriùs paulò & longiùs petitâ demonstratione) hunc ferè in modum: Totâ figurâ (81) AL circa BL in orbem volutâ, quadrans ADLBA describet hemisphærium, quadratum AL cylindrum, & triangulum BML conum, ejusdem omnia baseos & altitudinis. Cùm igitur circuli sint ut quadrata radiorum per Prop. 32; & verò quadratum GE sit æquale □□ GD & GF simul sumptis (Nam □ GF, h. e. GB, + □ GD est = □ BD sive BA sive GE, per Theor. Pythag.) & sic circulus à GE descriptus = duobus circulis à GD & GF descriptis simul sumptis; ablato communi circulo à GD descripto, restabit circulus à GF descriptus intrà conum, æqualis annulo à DE descripto circa Sphæram. Hoc idem verò cùm in omni alio casu similiter demonstretur, circulum nempe ex *gf* esse æqualem annulo ex *de*; sequetur omnes annulos à lineis DE vel *de* descriptos (h. e. totum id, quod à trilineo ADLM circumvolvendo descriptum concipitur solidum) esse æquales omnibus circulis à GF vel *gf* in cono descriptis (h. e. ipsi Cono à △ BLM genito;) atque adeò, uti conus est ⅓ cylindri ex AL geniti per Consect. Prop. 38. sic etiam solidum illud ex trilineo ADLM (excessum nempe cylindri suprà Sphæram) esse ⅓ cylindri & sic hemisphærium ⅔. Q. E. D.

Consectaria.

2. Hinc ulterior nunc confirmatio Consect. 2. Prop. XXXII. & Prop. XXXVI. n. 3.

2. Fluit hinc sponte suâ confirmatio Consect. 2. Defin. XX. & consequenter dimensio Sphæræ quoad soliditatem & superficiem. Posito enim a pro diametro sphæræ & cylindri circumscripti, & pro circumferentia ea, basis circuli maximi est $\frac{1}{4}eaa$, & hæc multiplicata per altitudinem dat $\frac{1}{4}ea^3$ pro cylindro. Ergo per Prop. præsentem $\frac{1}{6}ea^3$ dat sphæræ soliditatem (faciendo nempe, ut 3 ad 2, sic $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{6}$.) Hæc divisa per $\frac{1}{6}a$, dabit vi Consect. 1. alleg. Def. XX. & Consect. 3. Def. XVII. superficiem sphæræ eaa.

3. *Consect.* Sphæræ igitur (a) superficies eaa est maximi circuli $\frac{1}{4}eaa$ manifestè quadrupla.

4. Superficies cylindri, seclusis basibus, ex altitudine a in ambitum baseos circularem ea ductâ, provenit eaa, æqualis superficiei sphæræ.

5. Additis igitur duabus basibus, quarum qualibet est $\frac{1}{4}eaa$, tota cylindri superficies $1\frac{1}{2}eaa$ ad superficiem sphæræ eaa, est ut 3 ad 2.

6. Quadratum diametri aa ad aream circuli $\frac{1}{4}eaa$ est ut a ad $\frac{1}{4}ea$, h.e. ut diameter ad quartam partem circumferentiæ.

7. Conus ejusdem baseos & altitudinis cum sphæra & cylindro, erit per Consect. 2. hujus & Consf. Prop. XXXVIII. $\frac{1}{12}ea^3$, & cylindri $\frac{1}{4}$ sive $\frac{3}{12}ea^3$. Ergo Conus, Sphæra, & Cylindrus ejusdem altitudinis & diametri, sunt ut 1, 2, 3.

8. Co-

(a) Archim. Lib. I. de Sph. & Cyl. Prop. 31. (al. 30.)

8. Conus igitur æqualis excessui cylindri suprà Sphæram; prout in Schol. I. hujus jam aliunde patuit.

Scholion II.

Atque ita Palmarias Archimedis Propositiones Lib. I. de Sphæra & Cylindro directè & paucis demonstravimus, quas ille apparatu multò & per ambages & indirectè tantùm deduxerat. Quod si tamen eam ipsam Archimedis regiam & longiorem viam ex vicina quasi semita, multum & ipsa breviore lubeat inspicere; hanc etiam ita monstrabimus: Necessum habuit Archimedes ante omnia præmittere hoc lemma; *Corporis Conici, per circumvolutionem figuræ polygonæ A, B, C, D, E &c. (Fig. 82.) circulo juxta præscriptum Def. XIX. inscriptæ producti, superficies Conicas omnes simul sumptas æquales esse circulo, cujus radius sit media proportionalis inter diametrum AE & transversam BE, ductam à diametri una extremitate E, ad finem lateris AB alteri extremo proximi.* Hoc verò nos ope Arithmeticæ literalis ità demonstrabimus: Cùm BN, HN, sint sinus recti arcuum æqualium, CK & GK sinus toti &c. & lineæ BH, CG &c. parallelæ; ductis obliquè transversis HC, GD, erunt anguli ad H, C, G, D &c. omnes æquales per Consect. 1. Def. XI. & consequenter omnia triangula BNA, HNI, ICK &c. æquiangula, tum inter se, tum cum △ ABE; siquidem hoc ad B rectum habet per Consect. 1. Prop. XXXIII. & angulum ad A communem cum triangulo BNA. Quamobrem erit,

ut BN ad NA	sic	CK ad KI
vel HN ad NI		& GK ad KI.

sic $\frac{DM \text{ ad } ML}{FM \text{ ad } ME}$ sic EB ad BA; ponendoque adeò BN, HN, DM, FM = *a*, CK & GK = *b*, EB = *c*, pro NA, NI, ML & ME ponetur rectè *ea*, pro KI & KL *eb*, pro AB *ec*. Quibus ita positis habebuntur facilè & superficies Conicæ corporis inscripti, & area circuli cujus radius sit medius proportionalis inter AE & EB, constabitque ad oculum hæc duo esse inter se æqualia. Nam I. (*pro superficiebus conicis*) Diameter baseos BH = 2*a*, latus verò Coni AB = *ec*; Ergo (posito hîc o pro nomine rationis inter diametrum & circumferentiam) erit circumferentia 2*oa*; quæ multiplicata per latus dimidium ½ *ec*, dat superficiem conicam *oaec* per Consect. 4. Defin. XVIII. Et cùm circumferentia BH sit, ut antè 2*oa*, & circumferentia CG = 2*ob*, Summæ 2*oa* † 2*ob* dimidium *oa* † *ob* est circumferentia æquata: quæ multiplicata per latus BC = *ec* dat superficiem coni truncati BHGC = *oaec* † *obec*, per Consect. 5. cit. Def. Cùm denique huic sit æqualis superficies Coni truncati DFGC, & illi Conica EDF, Summa omnium addendo habebitur 4*oaec* † 2*obec*. II. (*pro area circuli*) Diameter AE est = 4*ea* † 2*eb*, & BE = *c*: Rectangulum ex his est = 4*eac* † 2*ebc* (quod etiam evidenter æquale est rectangulo ex transversis omnibus BH, CG, DF in latus AB, prout Archimedes rem proponit) æquale quadrato radii in quæsito circulo, quia radius sit medius proportionalis inter AE & BE, atque adeò æqualis

---

$\sqrt{4eac \dagger 2ebc}$, ut tota diameter sit $2\sqrt{4eac \dagger 2ebc}$.

Ergo *secundò* Circumferentia hujus circuli erit

20-

$20\sqrt{4eac + 2ebc}$, h. e. $\sqrt{1600eac + 800ebc}$: quæ multiplicata per dimidiam semidiametrum, h. e. per $\frac{1}{4}\sqrt{4eac + 2ebc}$ h. e. $\sqrt{eac + \frac{1}{2}ebc}$, dat aream quæsiti circuli $\sqrt{1600aaeecc + 1600eeabcc + 400eeebbcc}$. Hæc verò radix decenter extracta, est $40eac + 20ebc$, prorsus æqualis superiori Summæ Conicarum superficierum. Q. E. D.

Demonstrato sic lemmate, facilè nunc porrò demonstrabimus cum Archimede (quamvis aliter quàm ipse) *Sphæræ cujusvis superficiem esse quadruplam maximi in ipsâ circuli*; quod in Consect. hujus 3. jam aliunde patuit. Cùm enim omnes conicæ superficies corporis inscripti simul sumptæ per lemma præcedens semper sint æquales areæ circuli, cujus radius est media proportionalis inter diametrum AE ac transversalem EB; & verò hæc media proportionalis tantò propiùs semper accedit ad ipsam diametrum AE, & illæ superficies tantò propiùs ad ipsam Sphæræ superficiem, quò plurium laterum concipiatur inscripta figura, per Cons. 1. & 2. Def. XVIII. Si mente continuetur in infinitum arcuum AB, BC &c. bisectio, necessum est illas superficies conicas universas tandem in ipsam superficiem Sphæræ, & illam mediam proportionalem tandem in ipsam diametrum AE desinere, atque adeò superficiem Sphæræ æqualem esse circulo, cujus radius est diameter AE. Sed hic circulus esset quadruplus circuli maximi in Sphæra præsenti per Prop. XXXV. Ergo & superficies Sphæræ est hujus circuli quadrupla. Q. E. D.

Ex hoc autem ulterius erat facillimum deducere cum Archimede (alio tamen modo rursum) illud palmarium, quod in ipsa hujus Scholii Prop. jam ex alio

alio principio demonstravimus; *Cylindrum ad Sphæram ejusdem diametri & altitudinis se habere ut 3 ad 2.* Nam pro Diametro & altitudine ponendo a, & pro circumferentia ea, circuli area foret $\frac{1}{4}eaa$. Hæc area multiplicata per altitudinem a, dat $\frac{1}{4}ea^3$ pro cylindro, per Consect. 7. Def. XVI. eademque quadrupla, h. e. eaa multiplicata per $\frac{1}{6}a$ dat $\frac{1}{6}ea^3$ pro Sphæra per Consect. 1. Def. XX. & Consect. 3. Def. XVII. Erit igitur Cylindrus ad Sphæram ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{6}$ h. e. sub eadem denominatione, ut $\frac{6}{24}$ ad $\frac{4}{24}$ h. e. ut 6 ad 4, sive 3 ad 2. Q. E. D.

Ex quibus omnibus evidens est, totam Sphæræ dimensionem omnibus numeris absolutam fore, dummodò de ratione diametri ad peripheriam constaret; quam indagare nunc cum eodem Archimede allaborabimus.

PROPOSITIO XL.

Circuli Peripheria (a) habet ad suam diametrum proportionem minorem quàm $3\frac{1}{7}$ sive $\frac{22}{7}$ ad 1. & majorem quàm $3\frac{10}{71}$ ad 1.

Demonstratio.

Hujus tota vis in his consistit, quòd 1. Figura quælibet circumscripta circulo majorem ambitum habeat ipso circulo, & quælibet inscripta minorem: 2. Circumscriptæ 96 laterum ambitus ad diametrum rationem minorem habeat, quàm $3\frac{1}{7}$ ad 1, & inscriptæ majorem quàm $3\frac{10}{71}$ ad 1; ut de circuli

(a) Archim. Cyclom. Prop. 2.

circuli peripheria utrumque esset eò manifestius. Ad hoc secundum verò demonstrandum inquiritur 3. proportio unius lateris ex tali figura sive circumscripta sive inscripta sequente methodo:

Pro I. Prop. parte.

POnatur arcus BC (*Fig. 84. n. 1.*) 30. grad. ejusque tangens BC cum radio AC rectum angulum constituens faciat triangulum ABC dimidium æquilateri, ut AB sit ad BC in ratione dupla, v. g. 1000 ad 500; quibus positis erit AC radix differentiæ quadratorum BC & AB h. e. paulò major quàm 866. sed non plenè $\frac{1}{100}$.

Deinde bisectis continuè angulis BAC per AG, GAC per AH, HAC per AK, KAC per AL, uti BC est dimidium latus circumscripti hexagoni, GC dimid. latus dodecagoni, HC polygoni 24, KC, 48, LC denique 96 laterum; eritque per n. 3. Schol. III. Prop. XXXIV. GC ad AC ut BC ad BA†AC; pariterque HC ad AC ut GC ad GA†AC &c. Quamobrem

In prima bisectione qualium GC est 500, erit AC 1866 & paulò †, AG verò (quæ est radix Summæ □□ GC & AC) 1931$\frac{8}{10}$†.

In secunda bisectione, qualium HC est 500, reperietur AC 3797$\frac{8}{10}$† & AH 3830$\frac{5}{10}$†.

In tertia bisectione, qualium KC est 500, reperietur AC 7628$\frac{3}{10}$†, & AK 7644$\frac{6}{10}$†.

In

In quarta bisectione, qualium LC est 500, reperietur AC $15272\frac{8}{10}$ †.

Nunc igitur LC 96es sumptum dabit 48000 semiperipheriam polygoni, quæ ad semidiametrum AC $15272\frac{8}{10}$ eandem proportionem habet quam tota peripheria ad totam dimetrum. Sed 48000 continet $15272\frac{8}{10}$ 3 vicibus, ac præterea particulas residuas $2181\frac{6}{10}$, quæ minus sunt quàm pars septima divisionis; siquidem per 7 multiplicatæ dant solùm $15269\frac{2}{10}$. Ergo palam est peripheriam hujus polygoni (& à fortiori peripheriam circuli istâ minorem) ad diametrum habere minorem proportionem, quàm $3\frac{1}{7}$ ad 1. quod erat unum.

Pro II. Prop. parte.

Ponatur arcus BC (*n.* 2.) 60. grad. h. e. ang. BAC ad periph. 30: cùm angulus ad B sit rectus per Cons. 1. Prop. 33. erit triangulum ABC iterum dimidium æquilateri, & BC totum latus hexagoni, GC dodecagoni &c. Ut ponendo nunc pro BC 1000 (sicut antè pro dimidio latere hexagoni posueramus 500) AC sit 2000 & AB, radix differentiæ □□ BC & AC, h. e. minor quàm $1732\frac{1}{10}$. sc. 1732 & non plenè $\frac{6}{100}$.

Deinde bisectis continuè angulis BAC, GAC &c. cùm anguli ad peripheriam BAG, GAC, GCB, æqualibus arcubus BG & GC insistentes, æquales sint, *vi Prop.* 33. angulus ad G verò (communis triangulis GCF, & GCA)

cæte-

cæterique ad H, K, L, omnes sint recti *per Consect. 1. cit. Prop.* erunt hæc duo triangula CGF & CGA æquiangula, & consequenter, *vi Prop. 34.* perpendiculum GC in uno ad perpendiculum GA in altero, ut hypotenusa CF in uno ad hypot. AC in altero, h.e. (per fundamentum in parte priore demonstrationis ex n. 3. Schol. ill. Prop. XXXIV. positum) ut BC ad AB † AC; pariterque in seqq. HC ad HA ut GC ad AG † AC &c. Quamobrem

In prima bisectione, qualium GC est 1000, erit AG paulò minus quàm $3732\frac{1}{10}$; AC verò (quæ est radix Summæ □□ AG & GC) paulò minor quàm $3863\frac{8}{10}$.

In secunda bisectione, qualium HC est 1000 talium erit AH paulò minus quàm $7595\frac{8}{10}$ & AC paulò minor quàm $7661\frac{8}{10}$.

In tertia bisectione, qualium KC 1000 talium erit AK paulò minus quàm $15257\frac{7}{10}$ & AC paulò minus quàm $15290\frac{4}{10}$.

In quarta bisectione, qualium LC 1000, talium erit AL paulò minus quàm $30547\frac{6}{10}$; AC verò paulò minor quàm 30564, & consequenter si LC ponatur 500, erit AC minor 15282.

Nunc igitur LC 96es sumptum dabit 48000 pro peripheria inscripti polygoni, & 15282, ac paulò etiam minus pro Diametro AC. Sed 48000 continet 15282 tribus vicibus, ac prætereà 2154 particulas residuas, quæ plus sunt quàm $\frac{10}{71}$ divisoris; siquidem $\frac{1}{71}$ ex

M hoc

hoc numero facit $215\frac{17}{71}$ adeoque $\frac{10}{71}$ $2150\frac{170}{71}$ h. e. $2152\frac{28}{71}$. Ergo palam est peripheriam hujus polygoni inscripti (& à fortiori peripheriam circuli istâ majorem) ad diametrum habere majorem proportionem quàm $3\frac{10}{71}$ ad 1; quod est alterum.

Scholion.

QUod si quis malit uti numeris Archimedeis, quos ille selegit ad hunc scopum minimos, ponendò in prima demonstrationis parte, pro AB 306 & pro BC 153, in secunda pro AC 1560 & pro BC 780; is eodem demonstrationis processu eadem cum Archimede concludet. Nobis placuerunt illi nostri numeri, etsi paulò majores, quia memoriâ faciliùs tenentur, & rebus magis proportionati sunt, & partem demonstrationis posteriorem priori reddunt similiorem. Proportio interim diametri ad peripheriam circuli hac Archimedæâ methodo inter duos terminos adeò angustos est conclusa, qui non nisi $\frac{1}{497}$ vel $\frac{10}{4970}$mis ab invicem distant; siquidem $\frac{10}{71}$ ex $\frac{10}{70}$ subtractæ relinquunt $\frac{1}{497}$, ut $3\frac{10}{71}$ sive $\frac{223}{71}$ & $3\frac{10}{70}$ sive $\frac{220}{70}$, si reducantur ad eandem denominationem, faciunt, ibi $\frac{15610}{4970}$, hîc $\frac{15620}{4970}$. Hinc facile esset differentiâ $\frac{10}{4970}$ in duas partes divisâ, proportionem peripheriæ ad diametrum inter duas Archimedæas & extremas mediam, his numeris exprimere, ut 15615 ad 4970, vel (dividendo utrinque per 5) ut 3123 ad 994, sive (dividendo porrò utrinque per 7) ut $446\frac{1}{7}$ ad 142, sive (iterum dividendo per 2) ut $223\frac{1}{14}$ ad 71 &c. dummodò tam apti essent ad praxin hi numeri, ut illi Archimedæi,

quibus

quibus adeò uti præ aliis haud immeritò solemus, in dimensionibus, maximè summam ἀκρίβειαν haud postulantibus; aliàs *Ptolemæi*, *Vieta*, *Ludolphi à Ceulen*, *Metii*, *Snellii*, *Lansbergii*, *Hugenii* &c. grandiores numeros adhibitum, quales e. g. sunt sequentes:

Si Diameter	Circumferentia
10,000,000 — —	— 31, 416, 666. *Ptolem.*
10,000,000,000,000 —	— 31, 415, 926, 535. *Vieta.*
100,000,000,000,000,000,000,000 —	314, 159, 265, 358, 979, 323, 846½. &c. *Ludolphi à Ceulen.*

PROPOSITIO XLI.

AREa circuli habet ad quadratum suæ diametri eandem rationem, quam quarta pars circumferentiæ ad ipsam diametrum.

Demonstratio.

VEritatem hanc superiùs Consect. 6. Prop. XXXIX. jam demonstratam, aliter hic etiam ex abundanti deducemus. Cùm igitur circumferentia sit paulò minus quàm 3$\frac{1}{7}$, & paulò plus quàm 3$\frac{10}{71}$ diametri, pro excessu hoc æquato ponentes Z, si Diameter sit 1. circumferentiam dicemus 3 † Z. Ergo quarta pars circumferentiæ erit $\frac{3 \dagger Z}{4}$.

Sed area circuli (multiplicando dimidiam semidiametrum) h. e. ½ in circumferentiam, est pariter 3 ⅐ Z & quadratum diametri 1. Q. E. D.

Consectarium.

Ergo, si Archimedis (α) ratio vero propinqua interim adhibeatur, nim. 22 ad 7; area circuli ad quadratum diametri erit ut 11 ad 14; siquidem quarta pars ex 22, h. e. 5½ sive 11/2 ad diam. 7 sive 14/2 eandem rationem habet.

PROPOSITIO XLII.

Quadrati (β) Diameter AC (Fig. 83.) est lateri AB (& consequenter etiam periphaeria toti) incommensurabilis, h. e. habet ad id proportionem nullis numeris exacte exprimendam.

Demonstratio.

Nam, si pro AB ponatur 1, erit BC pariter, 1, & vi *Theor. Pythag.* AC √2. Ergo *per Consect. 4. Def. XXX.* AC est incommensurabilis lateri AB &c. Q. E. D.

Consect. 1.

Est tamen eidem potentia commensurabilis; siquidem ejus quadratum est ad quadratum lateris ut 2 ad 1.

Con-

(α) Archim. Prop. III. Cyclom.
(β) Euclid. Prop. ult. Lib. X.

Consect. 2.

QUod si proportio lateris aut totius peripheriæ ABCDA ad diam. AC duobus terminis vero proximis includi velit, ut illa diametri ac circumferentiæ in circulo; posito latere AB 100, & consequenter peripheriâ totâ 400, diameter est major quàm 141 & $\frac{42}{100}$ & minor quàm 141$\frac{43}{100}$.

PROPOSITIO XLIII.

Rea circuli est quadrato diametri incommensurabilis.

Demonstratio.

DIvisâ enim semidiametro CD (*Fig. 85.*) in duas partes æquales (adeoque diametro DF in 4) erit AC, 2, s. $\sqrt{4}$ & $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ $\sqrt{3}$ per Schol. II. Prop. XXXIV. in 3. Summa $\sqrt{4} + \sqrt{3}$, & Summa totidem maximo AC æqualium 4. Bisectis porrò partibus semidiametri, erit AC = 4 sive $\sqrt{16}$, $ac = \sqrt{15}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \sqrt{12}$, $ac = \sqrt{7}$; Summa $\sqrt{16} + \sqrt{15} + \sqrt{12} + \sqrt{7}$, & Summa totidem maximo AC æqualium = 16 &c. ita verò Summæ posteriores erunt numeri quadrati, ratione quadruplâ crescen-

 tes;

tes; priores autem semper componentur ex cujusque quadrati tali effabili radice, & pluribus aliis radicibus ineffabilibus numerorum impariter detruncatorum: ut proinde Summas illas priores aliquo numero effabili exprimere sit impossibile, per ea, quæ dicta sunt Schol. II. Defin. XXX. Quamobrem omnia indivisibilia quadrantis ADC ad totidem maximo æqualia quadrati ACDE, h. e. ipse quadrans ADC ad ipsum quadratum ACDE (& consequenter tota circuli area ad totum quadratum huic circumscriptum) erit ut quantitas surda seu ineffabilis ad verum vereque quadratum numerum, h. e. area circuli erit quadrato diametri incommensurabilis per Consect. 4. cit. Def. Q. E. D.

Consectarium.

ET quia quarta pars circumferentiæ ad diametrum eandem habet rationem, quam area circuli ad quadratum diametri *per Prop. 41.* illa quoque huic, & consequenter tota circumferentia diametro, erit incommensurabilis.

Scholion.

MIrum ergo est, quod GGL (u) perhibet se invenisse, quod quadrato diametri existente 1, area circuli sit futura $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$ &c. in infinitum, h. e. addendo $\frac{1}{1} - \frac{1}{3}$ & $+ \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c.)

(u) Acta Lips. Ann. 82. p. 44. seqq.

&c.) ad $\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99}$ &c. h. e. ad Summam infinitarum fractionum, quarum communis numerator est 2. denominatores autem quadrati unitate minuti, & quidem saltu per quaternos ex quadratorum serie excerpti; quæ quidem Summa posset videri uno numero effabilis, quandoquidem partes omnes sunt fractiones ad communem denominationem revocabiles; cùm fateatur tamen ipse *Leibnitius*, circulum non esse quadrato commensurabilem, nec posse uno numero exprimi.

CAPUT VII.

De Potentiis laterum in Triangulis & Figuris regularibus &c.

Propositio XLIX.

IN triangulis rectangulis (a) (ABC *Fig. 86.*) *quadratum lateris* (BC) *angulo recto subtensi potest quadrata laterum reliquorum* (AB & AC) *simul sumpta.*

Demonstratio.

VEritatem hanc in superioribus semel iterumq; demonstratam hîc alio confirmamus, nempe sequenti, modo: Super singula latera quadrati BE descriptis totidem semicirculis in uno puncto se necessa-

(a) Euclid. 47. Lib. I.

riò contingentibus, & semicirculo BAC æqualibus, si concipiantur inscripta totidem triangula illi BAC æqualia; manifestum erit □ BE complecti quatuor dicta triangula & præterea parvum quadratum FGHI, cujus latus FI v.g. est differentia inter latus majus trianguli CI & minus CF. [Nam quod latus minus CF = BA applicatum in primo semicirculo, si continuetur usque ad I in secundo semicirculo, faciat CI = CA sive latus majus alterius trianguli, & sic in cæteris, ex eo patet, quòd, sicut anguli ABC & ACB simul faciunt rectum, ita similiter BCF (= CBA) & ECF simul faciunt rectum, & consequenter ECF = ACB, & arcus lineaque EI = arcui & lineæ AB &c.] Quamobrem, si latus maximum trianguli dati BC vel BD &c. dicatur a, majus AC vocetur b & minus AC vel CF &c. sit c; erit □ lateris BC = aa, trianguli cujusque area $\frac{1}{2}bc$, adeoque 4 triangula simul $2bc$. Latus autem qudratuli medii erit $b-c$ ejusq; quadratum $bb + cc - 2bc$. Ergo si addantur huic 4 triangula = $2bc$; Summa omnium h.e. totum □ BE erit $bb + cc = aa$. Q.E.D.

Con-

Consectaria.

1.

Hinc datis lateribus rectum angulum comprehendentibus AC = b & AB = c, erit hypotenusa vel basis anguli recti BC = $\sqrt{bb+cc}$.

2. Quod si verò BC data sit = a & AC = b, quæraturque AB = x; quia $xx+bb = aa$, erit (utrobique ab æqualibus his demendo bb) $xx = aa-bb$: Ergo x, h. e. AB = $\sqrt{aa-bb}$.

3. Si duo △△ rectangula hypotenusas & unum latus æqualia habuerint, etiam alterum habebunt æquale.

PROPOSITIO XLV.

In obtusangulis triangulis (Fig. 87. n. 1.) quadratum Baseos seu lateris maximi (BC) *angulo obtuso* (BAC) *subtensi potest quadrata laterum reliquorum* (a) (AB & AC) *simul sumptorum, & præterea duo rectangula* (CAD) *facta ab uno latere, circa obtusum angulum* (CA) *& ab hujus continuatione* (AD) *usq; ad perpendiculum* (BD) *ex altero latere demissum.*

Demonstratio.

Si BC dicatur a, AB = c, AC = b, AD = x, erit CD = $b+x$. Ergo □ BD = $cc-xx$

(a) Euclid. Prop. 12. Lib. II.

$= cc - xx$ per Conf. 2. præced. Prop. similiterque, si □.CD $= bb + 2bx + xx$ subtrahatur ex □ BC $= aa$, erit $aa - bb - 2bx - xx =$ eidem □.BD. Ergo

$$cc - xx = aa - bb - 2bx - xx$$

h. e. (addito utrinque xx)

$$cc = aa - bb - 2bx$$

h. e. (additis utrinque bb & $2bx$)

$$cc + bb + 2bx = aa.$$ Q. E. D.

Consectarium.

Quod si in æquatione hac ultima utrinque auferatur $cc + bb$, erit $2bx = aa - bb - cc$ & (si porrò utrinque dividatur per $2b$, $x = \frac{aa - bb - cc}{2b}$: quæ est regula, datis lateribus trianguli obtusanguli inveniendi segmentum AD, & consequenter perpendiculum BD.

PROPOSITIO XLVI.

In acutangulis triangulis (u) *quadratum cujuslibet lateris* (e. g. BC *Fig.* 87. *n.* 2.) *angulo cuivis* (A) *subtensi potest quadrata reliquorum laterum* (AB & AC) *simul sumpta, minus duobus rectangulis* (CAD) *factis ab uno latere circa acutum angulum* (CA) *& hujus segmento* (AD) *ab acuto angulo* (A) *usq; ad perpendiculum* (BD) *ex altero latere demissum.*

Demon-

(u) Euclid. Prop. 13. Lib. II.

Demonstratio.

Sit rursum BC = a, AC = b, AB = c, AD = x, erit CD = $b-x$. Ergo $cc-xx$ = □ BD, & $aa-bb+2bx-xx$ (h. e. □ BC − □ CD) etiam æquale □ BD. Ergo

$$cc-xx = aa-bb+2bx-xx$$

h. e. (addito utrinque xx)

$$cc = aa-bb+2bx.$$

h. e. (addendo utrinque bb & subtr. $2bx$)

$$cc+bb-2bx = aa. \text{ Q.E.D.}$$

Consectaria.

1. Quod si in æquatione penultima addatur utrinque bb & subtrahatur aa, erit $cc+bb-aa = 2bx$, &, si porro dividatur utrinque per $2b$, erit $\frac{cc+bb-aa}{2b} = x$: quæ est regula, datis lateribus in triangulo acutangulo inveniendi segmentum AD, & consequenter perpendiculum BD.

2. Cognitis autem segmentis AD & CD, itemque perpendiculo BD in triangulis obliquangulis, sive obtusangulis sive acutangulis, cum data insuper sint latera BC & AB, non possunt

possunt amplius latere anguli tum triangulorum rectangulorum; tum consequenter obliquangulorum; ita ut ultimus Trigonometriæ planæ casus, quem Prop. XXXIV. in hunc locum distulimus, hinc etiam solutionem suam habeat.

Propositio XLVII.

Tangens (a) circulum BD (Fig. 88.) potest rectangulum sub secante DA & hujus portione extra circulum DE, sive per centrum ducta sit secans, sive non.

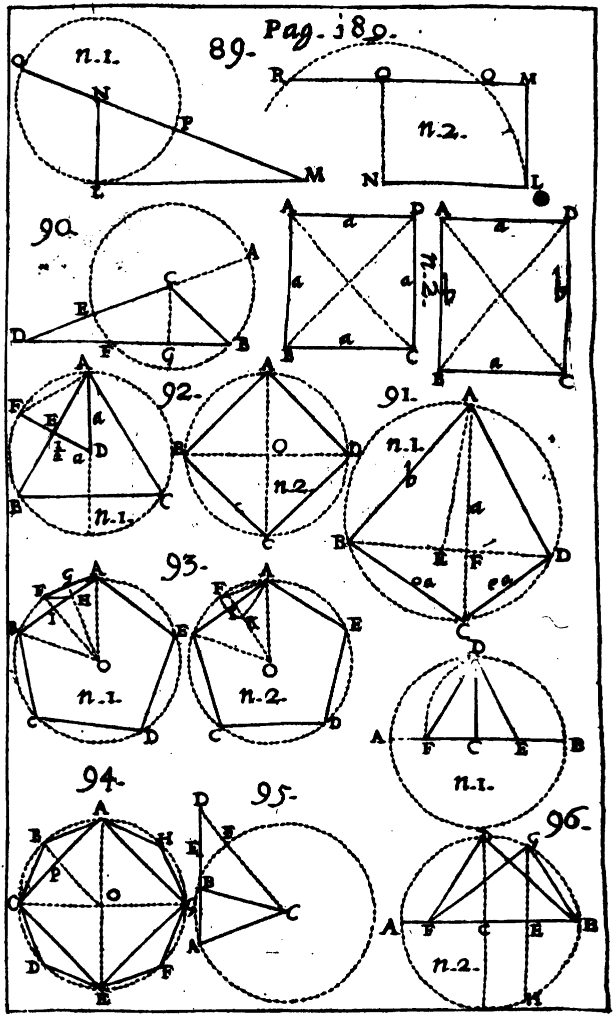
Demonstratio.

Nam in 1. Casu, si CB & CE sint $= b$, DE $= x$, erit CD $= b + x$, & AD $= 2b + x$: Ergo ▭ ADE $= 2bx + xx$. & □ CD $= bb + 2bx + xx$. Ergo, si ab hoc □ CD subtrahatur □ CB $= bb$, erit residuum $2bx + xx =$ □ BD $=$ ▭ ADE. Q. E. D.

In 2. Casu, manentibus cæteris ut ante, sit DE $= y$, FE vel FA $= z$. Erit igitur ▭ ADE $= 2zy + yy$. □ FC verò æquale □ EC $-$ □ FE $= bb - zz$ & eadem ratione □ FD ($=$ □ CD $-$ □ FC) erit $= bb + 2bx + xx - bb + zz$ h. e. $2bx + xx + zz$. Sed idem quadratum FD est $=$

zz +

(a) Euclid. 36. Lib. III.


Pag. 189.
89.
n.1.
n.2.
90
91.
92.
93.
94.
95.
96.

$ZZ + 2Zy + yy$. Quare sublato ex his æqualibus quadratis communi ZZ, erit $2Zy + yy = 2bx + xx$ h. e. per casum 1. = □ BD. Q. E. D.

Consectaria.

1.

Ergo rectangula talia diversorum secantium (ut ADE & ade in Fig. 1.) quæ eidem quadrato BD æquantur, inter se quoque æqualia sunt; quod æquatio ultima in demonstratione ($2Zy + yy = 2bx + xx$) ad oculum jam ostenderat.

2. Ergo per Prop. XIX. est ut aD ad AD, sic reciproce DE ad De in Fig. 2. Casûs.

3. Tangentes eundem circulum ex eodem puncto DB & Db (n. 3.) sunt æquales; quia quadratum utriusque potest idem rectangulum.

4. Neque plures esse possunt ex eodem puncto tangentes quàm duæ: nam si præter DB ac Db etiam Dc tangeret, hæc foret istis æqualis per Cons. 2. quod est absurdum per Cons. 3. Def. VII.

Scholion I.

Patet hinc origo constructionum Geometricarum, quibus utitur Cartesius Geom. p. 6. & 7. in resolvendis tribus his æquationibus, $ZZ = aZ + bb$, $ZZ = -aZ + bb$, & $ZZ = aZ - bb$. Etenim in 1. casu, cum NO vel NL (Fig. 80. n. 1.) vel

vel NP facit $= \frac{1}{2}a$, & tangentem LM $= b$, dicitur MNO per centrum ducta $= Z$, quantitati quæsitæ; id quod sic patet: Posito MO $= Z$, erit NM $= Z - \frac{1}{2}a$, ejusque $\square$ $ZZ - aZ + \frac{1}{4}aa$. Sed $\sqsubset\!\sqsupset$ OMP (quod est per Prop. præl. $= \square$ LM h. e. bb) unà cum $\square$ NL sive NP, h. e. $\frac{1}{4}aa$ est $= \square$ NM, vi Theor. Pythagorici. Ergo $ZZ - aZ + \frac{1}{4}aa = bb + \frac{1}{4}aa$. h. e. (ablato utrinque $\frac{1}{4}aa$) $ZZ - aZ = bb$. h. e. (addendo utrinque aZ) $ZZ = aZ + bb$: quæ est ipsissima æquatio proposita. In 2. Casu, si ponatur PM $= Z$ (uti quidem Cartesius vult) erit $\square$ NM $= ZZ + aZ + \frac{1}{4}aa$, & huic iterum, ut antè, $= bb + \frac{1}{4}aa$. Ergo $ZZ + aZ = bb$: Ergo $ZZ = -aZ + bb$: quæ est ipsissima secundi casûs æquatio. In 3. Casu, sive tota secans RM, (n. 2.) sive portio extra circulum QM ponatur $= Z$, radici quæsitæ, proveniet utrobique eadem æquatio tertii casûs; estque adeò manifestum, hanc habere duas illas radices. Nam si RM sit $= Z$ (addita Fig. Cartesii unicâ lineâ NO, quæ QR bisecet, & OM faciat $=$ LN) erit OR, sive OQ $= Z - \frac{1}{2}a$, adeoque $\square$ OQ $= ZZ - aZ + \frac{1}{4}aa$; & hoc unà cum $\sqsubset\!\sqsupset$ RMQ (quod est vi Prop. præsentis $= \square$ LM) $= \square$ NQ h. e. OM, h. e. $ZZ - aZ + \frac{1}{4}aa + bb = \frac{1}{4}aa$, h. e. (addendo aZ & tollendo $\frac{1}{4}aa$) $ZZ + bb = aZ$; h. e. (tollendo bb) $ZZ = aZ - bb$: quæ est ipsissima æquatio casûs tertii. Sin QM ponatur $= Z$, erit OQ vel OR $= \frac{1}{2}a - Z$, ejusque $\square$ $= \frac{1}{4}aa - aZ + ZZ$, æquè ac prius, & sic cætera omnia eadem. Q. E. D.

Scholion II.

EX Confect. 2. præsentis Prop. emanat alia quoque regula pro solvendo casu Trigonometriæ planæ ultimo, quem solvimus in Conf. 2. Prop. anteced. Nimirum si data sint omnia latera trianguli obliquanguli BCD, (*Fig.* 90.) si centro C, intervallo minoris lateris CB describatur circulus, erit, vi Confect. 2. præsentis Prop. Ut BD basis trianguli (basin enim hic dicemus latus trianguli maximum, aut in æquicruro unum ex majoribus) ad AD, (Summam laterum DC†CB,) sic DE, laterum differentia, ad DF segmentum baseos extra circulum. Hoc verò invento, si reliquum baseos intra circulum secetur bifariam, habebuntur tam FG & GB, quàm DG; quibus datis, ope △△ rectangulorum GBC & GDC, anguli desiderati omnes invenientur.

PROPOSITIO XLVIII.

IN omni quadrilatero (a) ABCD (Fig. 91. n. 1.) circulo inscripto, □ *ex Diagoniis AC & BD æquatur duobus rectangulis ex lateribus oppositis, AB in CD & AD in BC.*

Demonstratio.

DUctâ AE sic ut angulus BAE sit æqualis angulo CAD, erunt cognomina his triangula (siquidem & alteros angulos EBA & ACD, in eodem segmento

(a) Ptol. Lib. I. Almagesti.

to conſtitutos, æquales habent *vi Conſect. 1. Prop. XXXIII.*) inter ſe æquiangula, & conſequenter (*vi Prop. XXXIV.*) ut AC ad CD, ſic AB ad BE. Quare ponendo AC = *a* & CD = *ea*, pro AB autem *b*, erit BE = *eb*. Similiter cùm in ΔΔ BAC & EAD anguli cognomines ſint æquales (additâ ſcil. communi portione EAF ad BAE & CAD per conſtr. æquales) & prætereà anguli BCA & EDA in eodem ſegmento etiam æquales; hæc etiam triangula æquiangula erunt, & AD ad DE ut AC ad CB. Quare ponendo, ut antè, *a* pro AC & *oa* pro CB, & *c* pro AD, erit DE = *oc*. Ergo tota BD = *eb* † *oc*. Rectangulum igitur ex AC in BD erit = *eba* † *oca* = rectang. ex AB in CD = *eba* † □ ex AD in BC = *oac*. Q. E. D.

Scholion.

IN quadratis & rectangulis (*n. 2.*) res eſt per ſe clara. Nam in quadratis, ſi latus eſt *a*, diagonii AC & BD ſunt $\sqrt{2aa}$, eorumque adeò rectangulum = 2*aa* æquale manifeſtò duobus rectangulis oppoſitorum laterum. In oblongis, ſi bina latera oppoſita ſint *a* & altera *b*, diagonii ſunt $\sqrt{aa † bb}$ & eorum rectangulum *aa* † *bb*, æquale manifeſtò duobus rectangulis oppoſitorum laterum.

PRO-

PROPOSITIO XLIX.

Trianguli æquilateri (a) circulo inscripti (ABC Fig. 92. n. 1.) latus (AB) potentiâ triplum est radii (AD) h.e. □ AB triplum est □ti AD.

Demonstratio.

Sit AD vel FD = a ejusque adeò □ aa. Cùm igitur, ductâ DF per mediam AB vel medium arcum AFB, DE sit = ½ a [Nam anguli ad E sunt recti per Conf. 5. Def. VIII & hypotenusæ AD, AF æquales sunt per Schol. Def. XV. Latus AE autem est commune, ergo reliqua FE & ED æqualia, vi Consect. 3. Prop. XLIII.], ejusque □ ¼ aa, hoc subtractum ex illo relinquit ¾ aa pro □ AE. Ergo linea AE est $\sqrt{\frac{3}{4}aa}$ & consequenter AB $2\sqrt{\frac{3}{4}aa}$ h.e. $\sqrt{1\frac{2}{4}aa}$, h.e. $\sqrt{3aa}$. Ergo □ AB = 3aa. Q. E. D.

Consectaria.

I.

Si radius circuli est = a, latus inscripti trigoni regularis est $\sqrt{3aa}$. e.g. si AD sit 10, erit AB $\sqrt{300}$; & si AD sit 10 000 000, erit

(a) Euclid. 12. Lib. XII.

erit AB $\sqrt{}$ 300,000,000,000,000 id est, 17320508, & perpendiculum DE 5000 000.

2. Patet hinc evidenter, in genesi tetraëdri Def. XXII. proposita, elevationem CE (*Fig. 44. n. 1.*) esse ad partem diametri Sphæræ reliquam CF ut 2 ad 1. posito enim radio CB = *a* & ejus □ *aa*, erit □ AB vel BE = 3*aa* per Prop. præf. Ergo subtracto □ CB ex □ BD vel BE restat □ CE = 2*aa*. Cùm verò CE, CB, CF sint continuè proportionales, per n. 3. Schol. II. Prop. XXXIV. erit CE ad CF ut □ CE ad □ CB vi Prop. XXXV. h. e. ut 2 ad 1.

Scholion.

Et hinc demùm elucescit ratio generandi (a) Tetraëdri Euclidea, datæque Sphæræ inscribendi, dum jubet datæ Sphæræ diametrum EF ita dividere ut EC sit 2 & CF, 1, deinde ad EF erigere perpendicularem CA, & hac mediante describere circulum ABD, eiq; triangulum æquilaterum inscribere &c.

PROPOSITIO L.

Tetragoni regularis (*ABCD Fig. 92. n. 2.*) *Latus* (AB) *potentiâ duplum est radii* (AD).

Demonstratio.

Ductis enim diametris AC & BD, triangulum AOB est rectangulum, &

con-

(a) Euclid. Prop. 13. Lib. XIII.

consequenter vi Theorematis Pyth. si □ AO & BO ponantur = aa, erit □ AB = $2aa$. Q.E.D.

Consectarium.

ERgo, dum radius circuli AO ponitur = a, latus Tetragoni AB est = $\sqrt{2aa}$. e.g. si AO sit 10, erit AB $\sqrt{200}$; & si AO sit 10 000 000, erit AB $\sqrt{200\,000\,000\,000\,000}$: i.e. 14142136.

PROPOSITIO LI.

PEntagoni regularis (a) *ABCDE Fig. 93. n. 1.) latus (AB) potest & hexagoni & Decagoni latus eidem circulo inscriptorum, h.e.* □ *AB est equale quadratis AF & AO simul sumptis.*

Demonstratio.

POnatur AO = a & AF = b, AB autem æquale x; demonstrandum est $xx = aa + bb$: id quod fiet, latus AB inveniendo per partes BH & HA, sequenti modo:

Primò angulus AOB est 72°, & reliqui in illo triangulo ad A & B, 54°. Sed BOG etiam est 54°, utpote complexus arcum BF

(a) Euclid. Prop. 10. Lib. XIII.

Decagoni 36, & hujus insuper dimidium FG 18. Ergo ΔΔ ABO & HBO sunt æquiangula, eritq;

ut AB ad BO sic BO ad BH

x — a — a — $\frac{aa}{x}$.

Secundò in triangulo BFA, anguli ad B & A sunt æquales per n. 3. Consect. 5. Defin. VIII. ac vi ejusdem etiam ang. ad F & A in Δ FHA. Quare & ΔΔ BFA & FHA sunt æquiangula, eritq;

ut BA ad AF sic AF ad AH

x ad b — b — $\frac{bb}{x}$.

Tota igitur linea AB (quia AH portio reperta est = $\frac{bb}{x}$ & BH = $\frac{aa}{x}$) erit $\frac{aa+bb}{x}$, quæ primum posita fuerat x; ut hoc pacto $\frac{aa+bb}{x}$ sit = x, & utrinq; per x multiplicando $aa+bb = xx$. Q.E.D.

Consect. I.

Ergo, si radius circuli est a, latus Pentagoni AB est $\sqrt{aa+bb}$.

Con-

Consect. 2.

Ergo □ AI = $\frac{aa + bb}{4}$, & □ OI = □ OA − □ AI = $\frac{aa - aa - bb}{4}$ h.e. $\frac{3aa - bb}{4}$.

Ergo OI = $\sqrt{\frac{3aa - bb}{4}}$: quod aliter tamen etiam exprimi potest; nempe OI = $\frac{a + b}{2}$

Demonstratio.

Sit (a) OA vel OF (*n.* 2.) ut antè, = a, AF = b & FI nunc = x; erit OI = $a - x$. ductoque arcu FK intervallo AF, ut AK huic, & FI = IK = x; erit angulus IKA = F = 72°. Ergo ang. AKO = 108; & cum KOA sit 36, erit KAO etiam 36°, & sic KA = KO = AF = b. Quare OI est = $b + x$, quæ suprà fuerat $a - x$. Ergo 2 OI = $a - x + b + x$ h.e. $a + b$. Ergo OI = $\frac{a + b}{2}$.

Consect. 3.

Ergo differentia inter perpendiculum Trigoni DE (*Fig.* 92. *n.* 1.) & perpendiculum

N 3 pen-

(a) Euclid. Prop. 1. Lib. XIV.

pentagoni OI est = ½ *b* vi Consect. 2. hujus & Prop. XLIX. demonstr.

Consect. 4.

Hinc evidens etiam est, vi Prop. præs. quod in genesi Fabriana Icosaëdri Def. XXII. diximus (*Vid. Fig.* 46.) B *a* esse æqualem lateri pentagoni B A; quia nimirum F *a* = est semidiametro O B & B F est latus Decagoni.

PROPOSITIO LII.

Hexagoni latus potest ipsum radium, cui est æqualis per num. 1. Schol. Definit. XV.

PROPOSITIO LIII.

Latus Octogoni regularis (A B C D &c. *Fig.* 94.) *potest dimidium latus quadrati ac differentiam* (P B) *hujus dimidii lateris à radio simul sumpta.*

Demonstratio.

Quod enim □ AB sit = □ AP + □ BP, notum est ex Theorem. Pythag. Quòd autem PO sit = PA dimidio lateri quadrati, patet ex angulorum PAO & POA æqualitate, cùm uterque sit semirectus sive 45°. Quare latus Octogoni potest dimidium latus quadrati &c. Q. E. D.

Consectarium.

Ergo, si radius est = a, erit AP, vi Theor. Pythag. = $\sqrt{\frac{1}{2}aa}$ & PB = $a - \sqrt{\frac{1}{2}aa}$ illius □ $\frac{1}{2}aa$; hujus □ $1\frac{1}{2}aa - \sqrt{2a4}$: Ergo Summa s. □ AB = $2aa - \sqrt{2a4}$. Ergo Latus Octogoni = $\sqrt{2aa - \sqrt{2a4}}$. E. g. si AO sit 10, erit AB $\sqrt{200 - \sqrt{20000}}$; & si radius AO ponatur 10000000 erit AB $\sqrt{200,000,000,000,000 - \sqrt{2000000000000000000000000000000}}$, vi Consect. præsentis; aut ex ipsa Prop. si AO sit 10000000, erit AP vi Consf. Prop. XLIX. = 7071068, & consequenter BP = 2928932. Horum quadrata in unum collecta dant □ AB, & hinc extracta radix ipsum latus AB = 7653668.

PROPOSITIO LIV.

Latus Decagoni regularis (a) *potest portionem majorem lateris hexagoni mediâ & extremâ ratione secti.*

Demonstratio.

Sit BD (*Fig.* 95.) mediâ & extremâ ratione secta in E, eidemque in directum conjuncta BA = lateri Decagoni eidem circulo inscripti, cujus radius sit BC

(a) Euclid. 9. Lib. XIII. Coroll.

vel AC = BD. Demonstrandum est DE, majorem partem lateris hexagoni BD mediâ & extremâ ratione secti, esse æqualem lateri Decagoni BA, & potentiam hujus potentiæ illius.

Quoniam angulus ACB est 36°, ABC & A 72°, & consequenter CBD 108°, erunt BCD ac D uterq; 36°, adeò totus ACD 72°. (ut ita CD transeat præcisè per alterum extremum lateris pentagoni AF) Quare △△ ABC & ADC sunt æquiangula, &

AD ad AC } ut AC } ad AB. Ergo
i. e. BD } i. e. BD }

tota AD est mediâ & extremâ ratione secta. Sed eadem ratione secta est etiam BD per hyp. Quamobrem

ut AD ad DB & DB ad BA
sic DB ad DE & DE ad EB

Ergo DB ad DE eandem rationem habet quam DB ad BA: Ergo DE est = BA, & illius potentia potentiæ hujus. Q. E. D.

Consectaria.

I.

Ergo, si radius vel hexagoni latus est a, latus Decagoni est $\sqrt{\frac{5}{4}aa} - \frac{1}{2}a$ per Schol. II. Prop. XXVII. E. g. si radius est 10, latus Decagoni

cagoni erit $\sqrt{125} - 5$ & si radius ponatur 10 000 000, latus Decagoni erit $\sqrt{125\,000\,000\,000\,000} - 5000\,000$, nimirum quadratum radii & quadratum semiradii addendo in unam Summam, & ex hujus radice subtrahendo semiradium; quo pacto proveniet latus Decagoni = 6180340; cujus dimidium 3090170 dat differentiam inter perpendicula trigoni & pentagoni, vi Consf. 3. Prop. L.

2. Latus igitur Pentagoni est vi Prop. LI. = $\sqrt{\frac{5}{2}aa - \sqrt{\frac{5}{4}a^4}}$. Nam □ Hexagoni est aa, sive $\frac{2}{2}aa$, □ Decagoni verò $\frac{3}{2}aa - \sqrt{\frac{5}{4}a^4}$: Ex horum Summa extracta radix est latus Pentagoni, nempe $\sqrt{\frac{5}{2}aa - \sqrt{\frac{5}{4}a^4}}$. E. g. si radius est 10, latus pentagoni erit $\sqrt{250 - \sqrt{12500}}$, &, si radius ponatur 10 000 000, cùm latus Hexagoni ipsi sit æquale & latus Decagoni 6180340, horum quadratis in unam Summam collectis, ex ea Summa extracta radix dabit latus Pentagoni 11755704 quàm proximè; ipsis verò lateribus in unam Summam collectis, hujus dimidium 8090170 dabit perpendiculum in Pentagono OI, per Consect. 2. Propos. LI.

Scholion I.

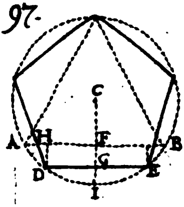
AD illustrandum ea, quæ deducta sunt in Consectariis Prop. LI. seqq. notâsse juvabit: Si a ponatur = 10 sive $\frac{1000}{100}$ erit latus Decagoni =

$V\overline{125}-5$ i.e. $\frac{618}{100}$ quàm proximè $= b$. Ergo $\square\ aa = \frac{1000000}{10000}$ & $\square\ bb = \frac{381924}{10000}$. Ergo $aa + bb$, sive $\square$ AB $= \frac{1381924}{10000}$. Perpendiculum OI $= \frac{a+b}{2} = \frac{1618}{100}$ divis. per 2, id est, $\frac{809}{100}$. Jam $\square$ AI est $\frac{1}{4}$ $\square$ti AB $= 34548\frac{1}{.}$ $\square$ OI $= \frac{aa+2ab+bb}{4} = 65448\frac{1}{.}$ Quod si ergo addantur $\square$ AG & $\square$ OG, Summa erit $= \square$ AO $= \frac{2aa+2ab+2bb}{4}$ i.e. $\frac{aa+ab+bb}{2} = 99 \mid \frac{9962}{10000}$ sive 100 quamproximè. Ita similiter, cùm perpendiculum OI suprà inventum, in Consect. 1. determinetur etiam per $V\frac{3aa-bb}{4}$, cùm aa sit $= \frac{1000000}{10000}$ & $3aa$ $\frac{3000000}{10000}$, subtracto hinc $bb = \frac{381924}{10000}$ residuum erit $\frac{2618076}{10000}$ & hoc diviso per 4, habebitur $\square$ OI $= \frac{654519}{10000}$. indeque extracta radix $\frac{809}{100}$ quamproximè; ut sic exemplo pateat, duas illas diversas quantitates Consect. 1. idem perpendiculum OI rectè exprimere.

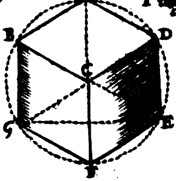
Scholion II.

SIcut ergo regulas nunc habemus practicas, Latera Pentagoni ac Decagoni arithmeticè determinandi; sic eadem geometricè quoque invenire per demonstrata licebit. Etenim, si semidiameter CB (*Fig. 96. n. 1.*) dividatur bifariam, erit EC $= \frac{1}{2} a$, & erecto perpendiculariter radio CD $= a$, DE erit $= V\overline{\frac{5}{4}aa}$. Huic si porrò æqualis abscindatur

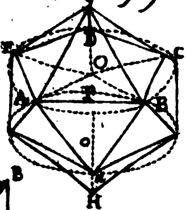
97.



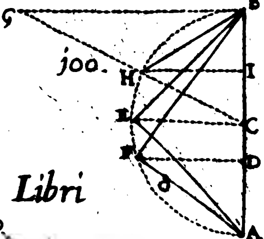
98.



99.

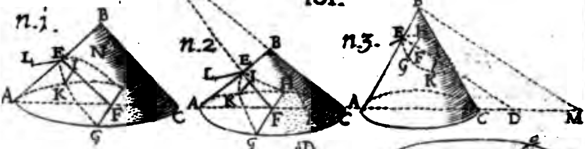


100.

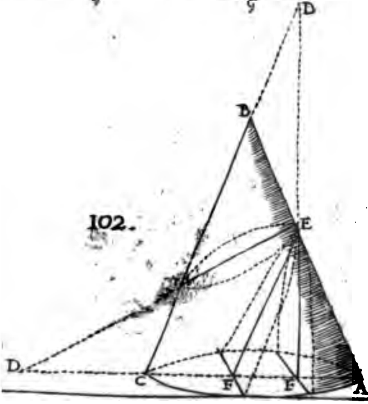


Finis Libri Primi.

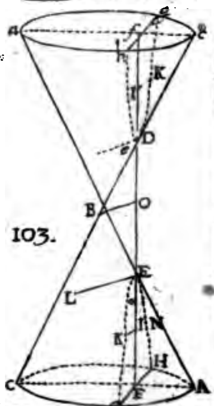
101.



102.



103.



tur EF, habebitur FC = $\sqrt{\frac{5}{4}aa} - \frac{1}{2}a$ = lateri Decagoni per Consect. 1. Ducta igitur DF, quæ potest radium vel latus Hexagoni DC & latus Decagoni FC simul, vi Theorem. Pythag. erit Latus Pentagoni quæsitum. Eodem recidit hæc alia nova, ejusdem problematis constructio, quâ BG (n. 2.) est latus Hexagoni, BD latus tetragoni, cui fit æqualis GF, ut FC sit latus Decagoni & DF latus Pentagoni; & quam nos more nostro sic demonstramus: Applicata GH latere trigoni erit quadr. GE $\frac{3aa}{4}$ per Prop. XLVIII. eoq; subtracto ex quadr. GF = 2aa s. $\frac{8}{4}aa$ per Prop. XLIX. restabit pro quadr. EF $\frac{5}{4}aa$. adeoq; linea EF $\sqrt{\frac{5}{4}aa}$, & pro FC $\sqrt{\frac{5}{4}aa} - \frac{1}{2}a$, quæ adeò est latus Decagoni, uti DF Pentagoni, eodem modo, quo priùs.

PROPOSITIO LV.

Latus Quindecagoni potest semidifferentiam inter latus trigoni & latus Pentagoni, & differentiam perpendiculorum in utrumq; latus demissorum simul sumptas.

Demonstratio.

Nam si AB (Fig. 97.) sit latus inscripti trigoni, & Pentagoni latus DE isti parallelum; erit AD latus inscribendi quindecagoni per Consect. 4. Definit. XV. Potest autem hoc latus AD in parvo triangulo

angulo rectangulo, & latus AH (quod est semidifferentia inter AB & DE) & latus HD (quod est differentia inter perpendiculum CF & CG) simul sumpta, per Theor. Pythag. Q. E. D.

Consectarium.

Hinc, si latus Trigoni AB dicamus c, & Pentagoni latus DE $= d$, erit AH $= \frac{c-d}{2}$, dum interim HD est $= \frac{1}{2}b$ per Consect. 3. Prop. LI. Cùm igitur quadr. AH sit $= \frac{cc-2cd+dd}{4}$ & quadr. HD $= \frac{bb}{4}$, erit quadr. AD $= \frac{cc-2cd+dd+bb}{4}$. Ergo latus Quindecagoni $= \sqrt{\frac{cc-2cd+dd+bb}{4}}$. hoc est, Quadratum semidifferentiæ laterum trigoni & Pentagoni, & quadratum differentiæ perpendiculorum in unam Summam colligendo, & ex hac Summa radicem extrahendo, habebitur latus Quindecagoni quæsitum. E. g. si radius CI ponatur esse 10000000, differentia lateris trigoni 17320508, & lateris Pentagoni 11755704, erit 5564804 & hujus semissis 2782402; Differentia verò perpendiculi CF, à perpendiculo CG, est 3090170. Horum igitur duorum postremorum numerorum quadratis in unam Summam collectis, & extra-

cta

cta inde radix dabit latus Quindecagoni 4158234 quamproximè.

Scholion.

Hic verò præcipuus harum postremarum Propositionum usus ostendendus est, in Tabulis Sinuum condendis. Etenim inventa superiùs, juxta suppositionem radii 10000000 partium, latera figurarum regularium præcipuarum, si bisecentur, habentur totidem sinus primarii; nimirum ex latere trigoni Sinus 60. grad. 8660254; ex latere Tetragoni Sinus 45° = 7071068; ex latere Pentagoni Sin. 36° = 5877853; ex latere Hexagoni Sin. 30° = 5000000; ex latere Octogoni Sin. 22° 30′ = 3826834; ex latere Decagoni Sinus 18° = 3090170; ex latere Quindecagoni denique Sinus 12° = 2079117. Ex his septem Sinibus primariis inveniuntur deinceps cæteri, & consequenter etiam Tangentes & Secantes omnes juxta eam regulam, quam n. 3. Schol. V. Prop. XXXIV. deduximus, & quam prolixiore exemplo illustrat *Philipp. Lansbergius* Geom. Triangulorum Lib. II. p. 7. & seq. Quo pacto verò sic inventis grandioribus hisce Sinuum, Tangentium &c. numeris sui recens accommodati sint Logarithmi, id paucis nunc indicandum restat. Nimirum Logarithmi Sinuum &c. ex Logarithmis vulgarium numerorum immediatè peterentur, siquidem eò usque Tabb. vulgarium extensæ fuissent, ut tam grandes nume-

numeros complecterentur; & sic e. g. Sin. o. gr. 34, qui est 98900 Logarithmus in Chiliadibus Vlacqui extat 4995196216. Quia verò cæteri Sinûs hoc majores inter numeros vulgares non amplius inveniuntur (nec enim ultra 100000 ascendunt, aliis etiam ad 10000 vel 20000 tantùm extensis) inventa est regula majorum etiam numerorum, quàm qui in Tabb. continentur, Logarithmos inveniendi. E. g. si Logarithmus Sinûs 45 qui est 7071068 inveniendus esset, hunc numerum totum in nullis tabb. vulgaribus datur reperire, ejus tamen quatuor primæ notæ 7071 reperiuntur in Tab. vulgarium Strauchiana cum Logarithmo respondente 3.8494808, & quinque primæ 70710 in Tab. Vlacqui cum Log. 4.8494808372. Horum Log. unus e. g. posterior excerpitur, auctâ solùm characteristicâ tot unitatibus, quot restant notæ numeri propositi, quæ in Tabb. non habentur, ut Log. excerptus futurus sit 6.8494808372. Deinde per differentiam hujus Logarithmi à proximè sequenti (quæ in Chiliadibus Vlacquianis in eum finem ubique adjecta est, & in hoc casu 61419) multiplicantur notæ propositi numeri residuæ, & à producto 4176492 tot notæ rejiciuntur, quot numero proposito ultra tabulares adhærent, nempe hîc duæ: residuæ enim 41764, si addantur Logarithmo priùs excerpto, prodit Logarithmus desideratus 6.8494850136, nempe secundùm Tabb. Vlacquianas, in quibus pro Logarithmo denarii suppositæ sunt 10,000,000,000; secundùm Strauchianas autem, quæ Logarithmum denarii habent tantùm, 10,000,000, resecandæ sunt tres posteriores

notæ,

notæ, ut Logarithmus dati Sinûs esset 6. 84948505; prout etiam in Tabb. Sinuum Strauchianis similibusque reperitur, nisi quòd loco characteristicæ 6. antecedat characteristica, 9, cujus hæc est superaddenda ratio: *Si servatæ fuissent characteristicæ*, prout vi regulæ modò datæ reperiuntur, Logarithmus Sinûs totius, (qui est in Tabb. Strauchianis 10 000 000) prodiisset 70 000 000, satis incongruus in operationibus trigonometricis. Quamobrem, ut Sin. totius Log. inciperet ab 1, pro facili multiplicatione ac divisione, assumptus est 100 000 000 auctâ characteristicâ ternatio, quo auctâs consequenter antecedentes omnes oportuit: & hinc e. g. Sinûs omnium minimi 2909 Logarithmus incipit à Characteristica 6, quæ aliàs juxta Tab. numerorum vulgarium futura fuisset 3.

Inventis hoc modo omnium Sinuum Logarithmis (quamvis & hîc, si reperti fuerint Logarithmi Sinuum à 45 ad finem usquè & insuper Logarithmus 30, reliquorum omnium Logarithmi compendiosiùs etiam per additionem & subtractionem haberi possint ex novo aliquo principio, quod nunc præterimus) Logarithmi Tangentium & Secantium facilè quoque inveniuntur, operando solùm, sed Logarithmicè nunc, secundùm regulas Schol. V. Prop. XXXIV. n. 5. & 6. traditas.

PROPOSITIO LVI.

TEtraëdri latus (a) potentiâ est ad diametrum Sphæræ circumscriptæ, ut 2 ad 3.

De-

(a) Euclid. 13. Lib. XIII.

Demonstratio.

QUia enim per ipsam genesin tetraëdri Def. XXII. (*Vid. hujus Fig. nempe 44. n. 1.*) & Schol. Prop. XLIX. OC est ⅓ semidiametri OB, quam dicemus *a*; erit □ CB = 1⅓ *aa* vi Theor. Pythag. & sic potentia lateris tetraëdri = 2⅔ *aa* per Proposit. XLIX. Sed potentia Diam. 2*a* s. 4/3 *a* est 1⅞ *aa*. Ergo potentia lateris tetraëdri est ad potentiam diam. ut 24 ad 36, h. e. (dividendo utrinq; per 12) ut 2 ad 3. Q. E. D.

Vel brevius:

□ CB est = 2 per Schol. Prop. 49. & □ EC = 4: Ergo □ EB = 6. Sed □ EF est = 9. Ergo □ EB ad □ EF ut 6 ad 9, h. e. ut 2 ad 3. Q. E. D.

Consectarium.

ERgo si Diam. EF ponatur = *a*, erit latus EB = $\sqrt{\frac{2}{3}aa}$.

PROPOSITIO LVII.

L*Atus octaëdri* (a) *est potentiâ dimidium Diametri Sphæræ circumscriptæ.*

Demonstratio.

CUm enim per ipsam genesin octaëdri Def.

(a) Euclid. 14. Lib. XIII.

Def. XXII. (*Vid. Fig. 44, n. 2.*) CA, CB, CF &c. sint totidem radii maximorum circulorum, si pro radio ponatur *a*, erit quadratū AF = 2*aa* per Theor. Pyth. Sed Diam. FG = 2*a*, quadratum est 4*aa*. Ergo potentia lateris est ad potentiam Diam. ut 2 ad 4 h. e. ut 1 ad 2. Q. E. D.

Brevius.

Quia AF est simul latus quadrati maximo circulo inscripti per Octaëdri genesin; erit per Prop. L. quadrat. AF ad quadr. FC ut 2 ad 1: Ergo ad quadr. FG ut 2 ad 4, per Prop. XXXV. Q. E. D.

Consectarium.

Ergo, si Diam. Sphæræ ponatur *a*, latus Octaëdri AF erit $\sqrt{\frac{1}{2}aa}$.

PROPOSITIO LVIII.

Latus Hexaëdri seu Cubi (a) est potentiâ subtriplum Diametri Sphæræ circumscriptæ.

Demonstratio.

Posito enim *a* pro latere Cubi inscripti GE, vel FE, (*Fig. 98.*) quadrat. Diagonii GE in basi Cubi erit = 2*aa*, per *Theor. Pythag.* eademque ratione quadrat. Diam. Cubi Sphæræq; circumscriptæ GD = quadrat. GE + □DE = 3*aa*. Q. E. D.

(*a*) Euclid. 15. Lib. XIII.

Consectaria.

1. ERgo, si Sphæræ diameter ponatur = *a* latus Cubi AB erit $\sqrt{\frac{1}{3}aa}$.

2. Diameter Sphæræ potest latus Tetraëdri & Cubi simul sumpta. Nam si potentia Diam. Sphæræ ponatur *aa*, potentia lateris Tetraëdri est $\frac{2}{3}aa$ per Conf. Prop. LVI. & potentia lateris Cubi $\frac{1}{3}aa$ per præf. Conf. 1. junctim ergo hæ duæ potentiæ faciunt *aa*. Q.E.D.

PROPOSITIO LIX.

LAtus Dodecaëdri (a) *potest portionem majorem lateris cubi extremâ & mediâ ratione secti.*

Demonstratio.

NAm si lateri Cubi AB (*Vid. Fig.* 45. *n.* 1.) ejusq; superiori hedræ ABCD accommodatum concipiatur Pentagonum regulare juxta genesin Dodecaëdri Definit. XXII. expositam, & intervallo B*e* fiat arcus *ef*, erunt △△ AB*e* & A*ef* æquiangula; (Nam angulis ad A & B existentibus 36°, & A*e*B 108°, ductâ *ef*, anguli B*ef* & B*fe* sunt uterq; 72°; ergo A*ef* reliquus 36°.) Quamobrem ut AB ad B*e* (h. e. B*f*) sic A*e* (h. e. B*e* vel B*f*) ad A*f*. Ergo latus Cubi AB est mediâ & extremâ ratione sectum in *f* & B*e* latus Dodecaëdri est = portioni majori B*f*. Q. E. D.

Scho-

(a) Euclid. Consect. 1. Prop. 17. Lib. XIII.

Scholion.

EXsurgeret hinc nova methodus datam lineam AB media & extrema ratione secandi, si sc. lineæ datæ applicetur pars pentagoni æquilateri mediantibus angulis A & B, 36°, & intervallo B, 4 resecetur B f. Potest autem hic angulus haberi geometricè, si aliud quoddam pentagonum regulare circulo cuidam inscribatur, &, subtensâ simili ductâ, angulis ad subtensam fiant hic ad A, & B æquales per Euclid. 23. Lib. I.

PROPOSITIO LX.

LAtus Icosaëdri (a) potest latus Pentagoni in circulo quinq; latera Icosaëdri ambiente; & hujus circuli semidiameter potest subquintuplum diametri Sphæræ Icosaëdri circumscriptæ.

Demonstratio.

PAtet utrumque ex ipsa genesi Icosaëdri Def. XXII. exposita. Prius equidem immediatè ex eo, quòd lateri Pentagoni AB (*Vid. Fig. 99.*) omnia cætera triangulorum, A a, B a &c. facta sunt æqualia, vi Consect. Prop. LI. Posterius hac illatione mediante: Si pro OA, circuli radio, ponatur a (cùm latus Pentagoni, quod hîc etiam est Icosaëdri latus, possit & radium & latus Decagoni simul, per cit. Prop.) erit altitudo OG

(a) Euclid. Prop. 16. Coroll. Lib. XIII.

latus Decagoni = $\sqrt{\frac{5}{4}aa} - \frac{1}{2}a$ per Conſ. 1. Prop. LIV. cui addita portio æqualis inferior oH, & altitudo intermedia Oo = a, dat totam Sphæræ circumſcriptæ diametrum GH = $a + 2\sqrt{\frac{5}{4}aa} - \frac{2}{2}a$, h. e. $2\sqrt{\frac{5}{4}aa}$ h. e. $\sqrt{\frac{20}{4}aa}$ h. e. $\sqrt{5aa}$; adeoq; □ diametri Sphæræ $5aa$. Sed □ radii AO eſt aa: Ergo quadratum diametri Sphæræ eſt ad quadratum ſemidiametri circuli quinque latera Icosaëdri ambientis ut 5 ad 1. Q.E.D.

Scholion.

Quod autem Sphæra diametro GH deſcripta tranſeat etiam per cæteros angulos hujus Icosaëdri, patet: aſſumpto enim centro inter O & o, erit radius FG = $\sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Sed FA etiam eſt = $\sqrt{\frac{5}{4}aa}$; nam □FO = $\frac{1}{4}aa$ & □AO = aa: Ergo Summa = $\frac{5}{4}aa$ = □FA. Q.E.D.

Conſectarium 1.

Ergo, ſi pro radio circuli ABCDE poſitum maneat a, habetur altitudo OG $\sqrt{\frac{5}{4}aa} - \frac{1}{2}a$ & latus Icosaëdri $\sqrt{\frac{5}{2}aa - \sqrt{\frac{5}{4}a^4}}$ per Conſ. 1. & 2. Prop. LIV. & Sphæræ circumſcriptæ diameter $2\sqrt{\frac{5}{4}aa}$, ut ex demonſtratione patet.

Con-

Consectarium 2. generale 5. Propp. postremarum.

SI AB (*Fig. 100.*) est Sphæræ diameter (*a*) secta in D ut AD sit $\frac{1}{3}$ AB, erit (erectâ perpendiculari DF) BF *latus Tetraëdri* per Prop. LVI. & AF *latus Hexaëdri* per Prop. LVII. BE autem vel AE (erectâ ex centro perpendiculari CE) *latus Octaëdri* per Prop. LVIII. Quod si jam AF mediâ & extremâ ratione secetur in O, habebitur AO *latus Dodecaëdri* per Prop. LIX. Si denique BG erigatur dupla CB, erit HI quoq; dupla CI, & □ HI = 4 □ CI; consequenter □ CH vel CB = 5 □ CI. Ergo □ AB (dupla ipsius CH) etiam = 5 □ HI (quæ est dupla CI) Ergo HI est radius circuli circumscribentis Pentagonum Icosaëdri, & IB *latus Decagoni* eidem circulo inscripti, & HB *latus Pentagoni*, idemque *Icosaëdri latus*, per Prop. LX.

LIBRI PRIMI
FINIS,
&
GLORIA DEO!

(*a*) Euclid. Prop. 18. & ult. Lib. XIII.

MATHESEOS ENUCLEATÆ

sive

Elementorum Mathematicorum

LIBER SECUNDUS,

SECTIO I.

exhibens

Definitiones Secundas.

DEFINITIO I.

SI concipiatur conus aliquis ABC (*Fig.* 101.) secari plano quodam secundùm angulos rectos ad latus coni, e.g. BA; exortum hac sectione planum EGFHE, super externa coni superficie lineâ curvâ HEG &c. terminatum, antiquitùs Euclidi, Archimedi, &c. dicebatur *Sectio conica*: Et quidem, si latera Coni AB & BC faciebant angulum ad B rectum, uti *num.* 1. speciatim *Sectio coni rectanguli*; sin obtusum, ut *num.* 2.

Sectio

Sectio coni obtusanguli; si denique acutum, ut *num.* 3. *Sectio coni acutanguli*.

DEFINITIO II.

POsteà verò deprehenderunt illorum posteri, præsertim *Apollonius Pergæus*, ex proprietatibus harum curvarum, quas antecessores feliciter detexerant, easdem cum planis suis inclusis omnes etiam in uno eodemque cono sive rectangulo sive obtusangulo sive acutangulo gigni, dummodò sectio EE (*Fig.* 102.) fieret pro casu 1. lateri opposito BC parallela; pro casu secundo cum illo sursum producto concurrens; pro tertio cum diametro baseos AC producta deorsum in D conveniens. Usque novis nunc nominibus (antiqua enim non ampliùs quadrabant) hasce sectiones ab invicem distinguerent, occasione à singularum proprietatibus infrà demonstrandis arreptâ, vocârunt primam *Parabolam*, secundam *Hyperbolam*, tertiam *Ellipsin*.

DEFINITIO III.

EVidens autem est, in solo casu secundo sectionem coni factam juxta ductum lineæ FED (*Fig.* 103.) incidere in conum verticalem *a*B*c* continuatis lateribus AB, CB, &c. comprehensum, ibique produce-

re aliam etiam sectionem, in eodem plano jacentem ac priori oppositam; ita ut GEHG & *gehg sectiones opposita* dicantur.

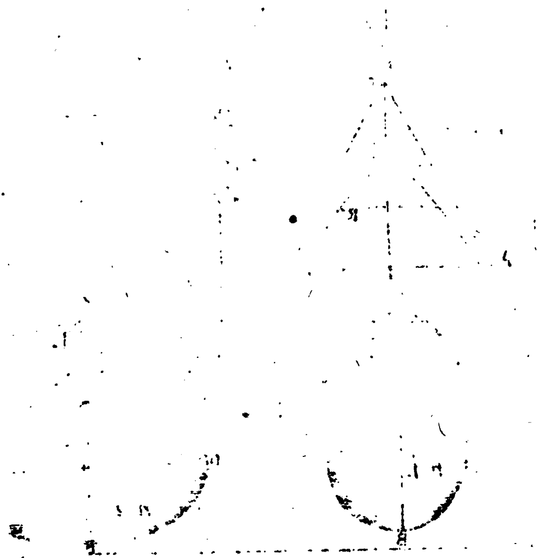
DEFINITIO IV.

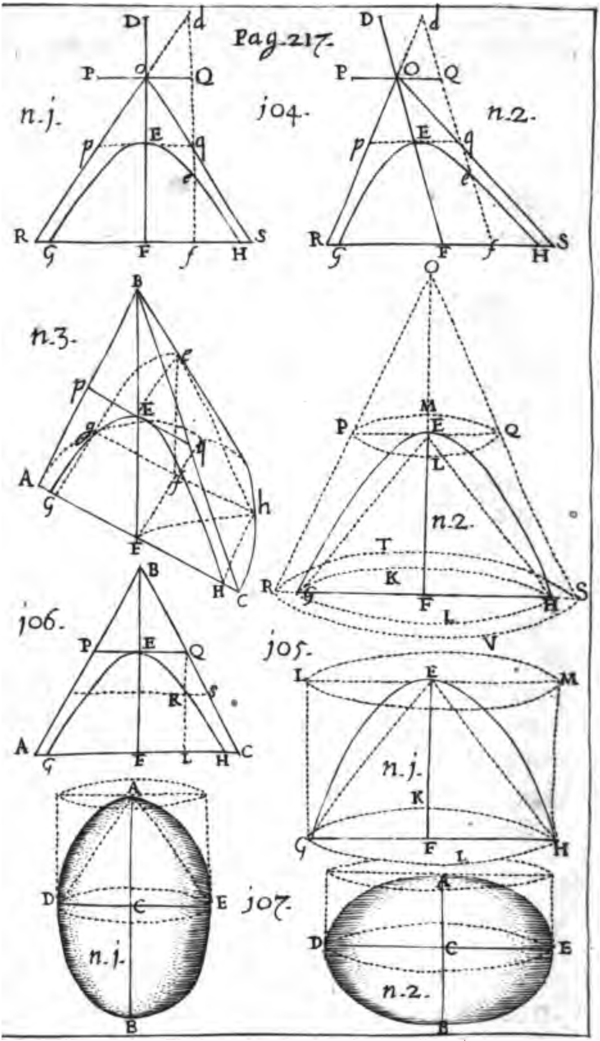
PRæter hæc autem ipsarum sectionum nomina excogitata sunt multa quoque alia pro variis lineis intra vel extra ipsas utiliter docendis & considerandis, quorum præcipua hoc loco sunt explicanda. Et primò quidem generatim linea EF per sectionis medium ab ejusdem principio E (quod sectionis *Vertex* appellatur) in diametrum baseos Coni AC (productam, si opus est) ita demissa ut lineam GH eique parallelas alias bifariam secet, *Sectionis Diameter* generali nomine appellatur; specialiter *Sectionis axis* dicta, si perpendiculariter istas secuerit; quemadmodum ipsas istas lineas GH KN &c. à diametro indifferenter, ab axe ad angulos rectos sectas, *Ordinatas vel ordinatim applicatas*, earumque dimidia, FG, IK &c. *Semiordinatas*, partes autem axeos vel diametri EF, EI &c. *Abscissas* nominârunt.

DEFINITIO V.

SPeciatim in Hyperbola continuationem axeos vel diametri ED usque ad con-

cur-




Pag.217.
104.
n.1.
n.2.
n.3.
105.
n.1.
n.2.
106.
107.
n.1.
n.2.

cursum lateris oppositi *c B*, h. e. usque ad verticem sectionis oppositæ, nuncupârunt *Latus transversum* hyperbolæ, cui in Ellipsi axis ipse vel diameter longior respondet, idem adeò nomen apud recentiores ferens, apud Apollonium autem *Diameter transversa* vel *axis transversus* audiens; uti brevior *axis rectus*, sive *recta diameter*, aut *secunda*, aut *conjugata*, & hujus punctum medium O, *Sectionis* vel *Oppositarum Sectionum Centrum* vocatur.

DEFINITIO VI.

LAtus Rectum autem nuncupârunt lineam quandam E L (*Fig.101.*) in singulis sectionibus peculiariter inveniendam, ut infrà videbimus; Et quia hoc latus rectum quasi norma est, secundùm quam Ordinatarum quadrata sive potentiæ æstimantur (uti suo loco constabit,) ideò veteribus etiam per periphrasin dicta est *Linea secundùm quam possunt ordinatim applicatæ*; recentioribus autem quibusdam *Parameter* appellatur. Inter hoc latus rectum autem & latus transversum inventa media proportionalis P Q (*Fig. 104. n. 1. & 2.*) (Vid. infrà Consect. 2. Prop. VIII.) & per centrum O ordinatis parallela ducta, *Axis secundus*

vel *Diameter secunda* aut *conjugata* hyperbolæ audit.

DEFINITIO VII.

QUod si concipiamus, Diametrum vel axem conjugatum P Q medio sui puncto O hyperbolæ in vertice E tangendo applicatam, & ex centro O per hujus tangentis extrema *p* & *q* ducantur lineæ rectæ O R, OS, hæ sunt illæ lineæ. quas *Apollonius* Prop. 1. Lib. II. demonstrat, ad curvam G E H propiùs licet propiùsque accedentes quò longiùs utræque continuantur, nunquam tamen cum ipsâ concurrere, ideoque ἀσυμπτώτους, *Non-coincidentes* appellavit, aliis *Intactas* dici solitas. Quæ res eo casu præcipuè elucet, quo sectio coni hyperbolica fit parallela sectioni triangulari per axem coni A B C (*n.* 3.) secundùm lineam *e*, *f*, parallelam axi B F. Quod si enim hyperbolam *g e h* sibi semper parallelam antrorsum moveri concipiamus juxta lineas *g* G, *f* F & *h* H æquales & parallelas, donec statuatur in situ G E H; manifestum est ejus lineam curvam G E H distare utrinque à rectis B C B A sinu verso arcuum *h* C & *g* A in baseos circularis ambitu æqualium, dum interim propiùs ad eas propiùsque sese exporrigere sit evi-

den-

dentissimum. Ut hinc sponte suâ fluant sequentia

Consectaria

1.

IN hoc casu ipsa coni latera esse asymptotos hyperbolæ lineas, dummodò hoc unum constiterit, quod punctum B sit ejus centrum, & EB dimidia diameter transversa; id quod ex num. 1. & 2. Fig. præsentis abundè patet: siquidem sectione *ef* parallelâ factâ axi coni DF, vi Def. V. *de* (quæ in casu n. 3. coincideret cum *dq*) est diameter transversa, triangula *dpq* & O*p*E verò sunt æquiangula, & consequenter, ut *p*E est $\frac{1}{2}$ *pq*, sic OE $\frac{1}{2}$ *dq*.

2. Lineas AG & HC (*num. 3.*) æquales esse, utpote Sinûs versos æqualium arcuum; similiterque (*n. 1. & 2.*) RG & HS, cùm FR & FS æquè ac E*p* & E*q* sint æquales (nam ut OE ad E*p*, sic OF ad FR / — E*q*, — FS) & semiordinatæ FG & FH pariter æquales.

3. Consequenter ▭ ▭ ex RG in GS & ex HS in HR æqualia esse &c. quæ omnia infrà universaliùs demonstrabuntur.

Definitio VIII.

SI planum aliquod Parabolicum (*a*) HEGFH, (*Fig. 105. n. 1.*) cum inscripto sibi triangulo HEG, & circumscripto rect-

(*a*) Archim. de Conoid. & Sphær. Def. I.

rectangulo H L circa axem EF in puncto F in orbem moveri concipiatur; à triangulo quidem conum, à rectangulo cylindrum, à parabola verò solidum parabolicum gigni palàm est, quod cum cono comprehenso & cylindro comprehendente communem basin HIGK & eandem altitudinem EF habet, Archimedi *Conoïdes Parabolicum* appellatum.

DEFINITIO IX.

SI porrò planum aliquod (a) hyperbolicum HEGFH (n. 2.) cum triangulo inscripto sibi HEG, & alio ab asymptotis OR, OS, circumscripto ROS circa axem communem OEF in puncto F in orbem volvi concipiatur; ab inscripto quidem triangulo conum comprehensum, ab hyperbola *Conoïdes Hyperbolicum* super eadem basi HIGK, & eadem altitudine EF describi palàm est; à △ ROS autem alium conum, Archimedi comprehendentem dictum, cujus basis RTSV, & altitudo composita ex axe hyperbolæ EF ac dimidio latere sive axe transverso OE (quod Archimedes axeos hyperbolæ additamentum appellavit,) quemque in duas partes commodè dividemus; nimirum in conum OPMQL,

(a) Archim. de Conoid. & Sphær. Def. III.

OPMQL, cujus basis pro diametro habet PQ axem rectum sive secundum, altitudo verò æquatur axi transverso dimidio; & in curticonum sive conum truncatum, duabus basibus PMQL & RTSV terminatum, altitudine verò conoïdi & cono inscripto respondentem: è quo, tanquam comprehendente, si demptum concipiatur inclusum conoïdes, relinquetur curticonus cavus infernè annulo RGIVHSKT, supernè basi circulari PMQL terminatus, ac inter volvendum à lineis EP, GR &c. intermediis, sive à plano mixtilineo EGRP genitus. Quod si loco coni hujus comprehendentis cylindrum super eadem basi eademque altitudine cum conoïde & cono incluso circumscriptum intelligamus, omnia similia habebimus iis, quæ in Definit. VIII. dicta sunt.

Consectaria.

Quod si casum primum Def. IX. spectemus expressum figurâ Defin VII. n. 3. indeque traductam figuram præsentem volvi in orbem, circa axem BEF (*Fig. 106.*) concipiamus; hæc Consectariorum loco pro fundamento demonstrationum futurarum hîc commodè deducemus:

1. Lineas EQ, RS, HC &c. spatii mixtilinei inter hyperbolam & ἀσυμπτώτων comprehensi

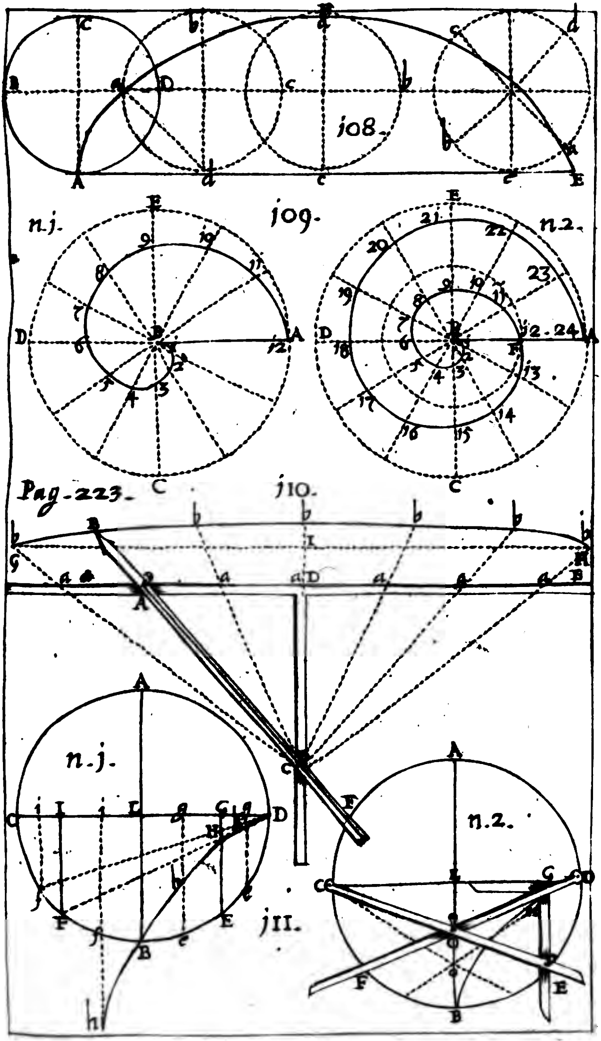
benſi (ordinatarum nempe exceſsûs) tametſi inæquales ac deſcendendo ſemper minores, in hac tamen circumvolutione deſcribere ſpatia circularia prorſus æqualia, EQ nempe circulum integrum, RS verò & HC &c. annulos circulares, omnes æqualis magnitudinis; id quod hanc figuram cum illa priùs allegata comparanti ſic patebit: Cùm genita à lineis EQ, FC &c. ſint ut quadrata earundem linearum, & verò □ Fb vel FC (*Vid. n. 3. Fig. 104.*) ſuperet quadratum *fb* vel FH excessu quadrati F*f* vel E*e* vel EQ, conſequenter ipſum genitum ab FC ſuperet genitum ab FH exceſſu geniti ab EQ; ac idem genitum ab FH exceſſu geniti ab HC; manifeſtum eſt genitum ab EQ circulum, æqualem eſſe genito ab HC annulari ſpatio: idemque de quibuslibet ab RS productis ſpatiis eodem modo conſtabit.

2. Curticonum igitur cavum, à ſpatio EHCQ juxta Def. IX. genitum, æqualem eſſe cylindro à rectangulo FIQE genito; ſiquidem omnia hujus indiviſibilia omnibus illius indiviſibilibus æqualia ſunt, per Conſect. 1.

Definitio X.

SI denique (*a*) planum aliquod ellipticum circa alterutrum axem, ſive longiorem DE, (*Fig. 107. n. 1.*) ſive breviorem AB, (*n. 2.*) convolvi concipiatur, intelligetur inde genitum ſolidum ellipticum, Archimedi

(*a*) Archim. de Conoïd. & Sphær. Def. VI.



Pag. 223.

medi *Sphæroides* dictum; & in primo casu quidem *oblongum* vel *erectum*, in altero *latum* vel *depressum*: Estque per se clarum, si ante hanc circumvolutionem ellipseos ejus alteri medietati triangulum inscriptum & rectangulum circumscriptum fuerit, easdem altitudines & bases cum semiellipsi habentia, in circumvolutione postmodum à triangulo conum, à rectangulo cylindrum describi, quibus infrà Sphæroides dimidium veniet comparandum; sicut & utrumque Conoïdes cum suis conis ac cylindris inscriptis ac circumscriptis.

Definitio XI.

SI super recta linea AE (*Fig.* 108.) provolvi concipiatur rota sive circulus ABCD, donec punctum ejus A, in quo dictam lineam tangit, eidem rursus occurrat in E; emetietur circulus lineam AE peripheriæ suæ æqualem; punctum A verò describet motu suo lineam curvam AFE, quæ *Trochoïdes* sive *Cycloïs* appellatur: quemadmodum area illa, quam curva hæc & recta subtensa AE comprehendunt, *Spatium cycloidale* nuncupatur; circulus autem, cujus motu ea determinantur, *Circulus genitor* audit.

Con-

Consectarium.

PAtet autem ex ipsâ genesi hujus curvæ, punctum *a* describens à puncto contactus *d* vel *c* ubique tantâ portione circuli distare, quantâ portione rectæ decursæ AE distat idem punctum A ab eodem puncto contactûs, h. e. si punctum *d* ab A distet quartâ parte lineæ AE, arcum *da* quartam etiam partem esse circuli in statione hac secundâ considerati; & puncto *c* ab A distante per semissem intervalli AE, arcum *ca* etiam semissem esse circuli, punctumque adeò *a* in E incidere: & cùm punctum *e* ab E non nisi parte octava totius AE abest, arcum *ea* quoq; esse octavam partem totius circuli.

Definitio XII.

SI recta linea BA (*num. 1. Fig. 109.*) circa terminum alterum B fixum æquabili motu in orbem feratur ab A per C, D, E ad A usque, interea verò punctum quoddam mobile aliud itidem æquabiliter per rectam lineam BA à B versus A decurrat, ita quidem ut eodem momento, quo mobile A revolutionem unam in orbem absolverit, alterum hoc mobile punctum viam suam rectam unà confecerit, puncto A in primum situm reducto coincidens; hoc extremum A quidem revolutione suâ descripserit circulum ACDEA, illud alterum

terum autem punctum mobile curvam aliam B 1, 2, 3, 4 &c. quam cum Archimede vocabimus *Helicem* sive *Spiralem lineam*, & planitiem comprehensam ab hac linea spirali & recta BA in statione prima, *Spatium spirale*. Quod si verò supponatur e. g. motus rectus puncti per BA decurrentis duplo tardior; quàm in casu priore, ita ut (*Vid. num. 2.*) quo tempore punctum A revolutionem integram ACDEA jam confecit, alterum punctum mobile demum pervenerit ad F, medium viæ BA, atque adeò tum demum cum extremo concurrat, cùm hoc intereà alteram revolutionem plenè absolverit; descripta concipietur linea spiralis geminata, cujus partes tamen cum Archimede ita distinguemus, ut, quemadmodum is partem rectæ BF, in revolutione prima decursam vocat *primam lineam* simpliciter, circulumque interea à recta BF designatum *primum circulum*; ita nos partem curvæ intereà descriptam B 1 3 6 9 12, dicamus *primam Helicem*, sive *Spiralem primam*, & aream his comprehensam *Spatium spirale primum*: Et, quemadmodum reliqua pars lineæ rectæ FA, in revolutione altera decursa, *secunda linea* audit, ac circulus interim à tota linea BA designatus *secundus circulus*; ita curva

intereà descripta, 12, 15, 18, 24, vocetur *Spiralis secunda*, & spatium ab his secundis comprehensum etiam *Spirale secundum*, & sic porrò. Fluunt autem sponte suâ ex his definitionibus sequentia

Consectaria.

I.

LIneas B 12, B 11, B 10 &c. ad Spiralem sive primam sive secundam sub angulis æqualibus eductas (eodemq; modo, (α) B 12, B 10, B 8 &c. vel B 12, B 9, B 6 &c.) esse arithmeticè proportionales; uti patet.

2. Lineas ad Spiralem primam quomodocunque eductas ut B 7, B 10 &c. esse inter se ut arcûs circuli inter BA dictasque lineas (β) B 7, B 10 &c. intercepti; quod intuenti supposita pariter evidens est; siquidem, quo tempore extremum A decurrit partes circuli septem, punctum mobile alterum decurrit itidem 7 partes rectæ BA &c.

3. Lineas denique rectas ex initiali puncto (γ) B ad Spiralem secundam eductas e.g. B 19 & B 22 (*num. 2.*) esse inter se ut arcûs prædicti unà cum peripheria tota utrinque superaddita: siquidem, quo tempore extremum A decurrit totum circulum sive partes 12 & præterea partes 7 (h. e. in universum 19) eodem tempore

(α) Archim. Prop. 2. de Spiral.
(β) Archim. Prop. 14.
(γ) Archim. Prop. 15.

pore punctum mobile alterum decurrit partes rectæ BA (hoc casu in 24 divisæ) 12 ac præterea 7, h. e. pariter 19; & sic in cæteris.

DEFINITIO XIII.

SI linea quædam recta BAF intra rectos angulos ADC, CDE ita moveri concipiatur, ut ex una parte punctum quoddam C, in altero normæ crure fixum perpetuò stringat, ex altera verò certo sui puncto A mobili juxta latus normæ alterum incessanter decurrat (qui complicatus equidem regulæ describentis BAF motus, quo pacto posset organicè procurari, ex Figura 110. est videre;) ab extremo lineæ mobilis puncto B curva describetur, ab inventore *Nicomede Conchoides prima* dicta, cujus ea est proprietas, ut rectæ ex centro C ad ejus ambitum ductæ, CB, C*b*, non ipsæ quidem, ut in circulo, æquales sint, sed portiones tamen inter curvam & rectam directricem AE interceptas AB, *ab*, &c. æquales omnes habeat; prout ex ipsa genesi patet.

DEFINITIO XIV.

SI diametris alicujus circuli AB & CD (*Fig. 111. n. 1.*) ad angulos rectos se secantibus, sumantur BE vel B*e* & BF vel B*f* arcûs æquales, & ex E vel *e* perpendicu-

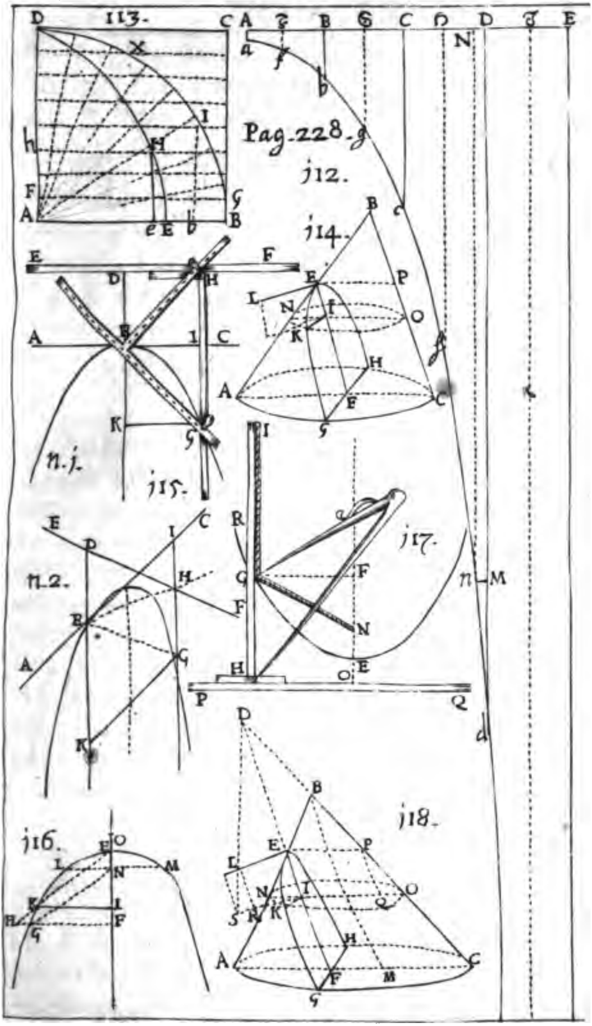
dicula EG vel Eg, per hæc autem, ex D ad F vel f transversæ DF vel Df ducantur; puncta intersectionum H, h &c. plurima decenter connexa, dabunt lineam curvam DhHhB (etiam extra circulum si velis continuandam) quæ *Diocli* communiter attribuitur hodieque *Cissoides* appellatur.

Scholion.

QUod si modum quendam organicum hanc describendi curvam quis desideraverit, hunc fortè haut adeò incongruum ipsi dabimus, quem altera figura (*n*. 2.) satis exprimet attendenti, quòd, sicut ab initio duæ regulæ transversæ CE ac DF, in C ac D mobiles, sese intersecuerant in B, coïncidente tum normâ GE cum LB, atque adeò tribus punctis O, B & E coïncidentibus; ita sublato concursu O versus L, regula CE normam GE in hoc suo situ normali super peripheria BD antrorsum promotura, hæc verò puncto H intersectionis suæ cum altera regula DF perpetuæ, desideratam curvam BHD descriptura sit &c.

DEFINITIO. XV.

SI rectâ lineâ AE (*Fig*. 112.) divisâ in partes aliquot æquales AB, BC &c. ex punctis divisionum A, B, C &c. ducantur parallelæ Aa, Bb, Cc &c. in progressione geometricâ (ut e.g. Aa, sit 1, Bb 4. Cc 16,



113.
Pag. 228.
112.
114.
n. 1.
115.
n. 2.
117.
116.
118.

Cc 16, Dd 64 &c. Vel Bb 10, Cc 100, Dd 1000, Ee 10000 &c.) porròque bisectis AB, BC &c. in F/G/H/I demittantur mediæ proportionales inter collaterales proximas, Ff/Gg/Hh/Ii &c. idq; tamdiu fiat, donec parallelæ hæ fiant sibi quàm maximè vicinæ; Linea curva per harum extrema af bgch dic ducta erit illa *Logarithmica* recentiorum, cujus proprietates sunt insignes & usûs egregii.

Scholion.

Inter hos usus ille non est postremus, à quo nomen suum habet hæc linea, scil. in Logarithmorum naturâ & inventione declaranda. Etenim si v.g. 1. linea hæc accuratè in spatio grandiore esset designata, portionibus AB, BC &c. tantis assumptis ut singulæ subdividi possent non in 100 tantùm vel 1000, sed vel in 10000 vel 100000 &c. particulas; positâ AB 100000, (& sic A 00000) AC foret 200000, AD 300000 &c. dum interim his tanquam Logarithmis primariis arithmeticè progressionalibus responderent numeri geometricè proportionales Aa 1, Bb 10, Cc 100, Dd 1000, Ee 10000 &c. Unde jam 2. dato cuicunque intermedio numero suus posset assignari Logarithmus, e.g. numero 982 resecto enim ex Dd hoc numero ex Scala per lineam DM Geometrica, si ducatur Mn cum AD & nN cum DM parallelis, daret AN in eadem scala Logarithmum quæsitum, & vice versâ. Quod si verò 3. difficile videatur figuram adeò grandem delineare, conceptus saltem talis delineationis clarissimus evidenter

ter declarat modum arithmeticum, quo usi sunt Viri ingeniosissimi, qui stupendo labore Logarithmicas Tabulas jam condiderunt, inveniendo sc. continuè medios proportionales, arithmeticos quidem inter Logarithmos quosque duos jam notos, & geometricos inter duos numeros vulgares illis respondentes &c. Conf. quæ notavimus in Schol. II. Prop. XX. Lib. I. & notetur 4. ex *P. Pardies*, quòd, cùm numerorum in decuplâ ratione distantium Logarithmi differant numero 100000, inventis Logarithmis omnium numerorum à 1000 ad 10000 habeantur unà Logarithmi aliorum omnium, qui sunt inter 100 & 1000, inter 10 & 100, inter 1 & 10, characteristicâ solùm mutatâ, & in primo casu unitate, in secundo binario, in tertio ternario imminutâ; ut e. g. si numeri 9900 inventus esset Logarithmus 399,563, subdecupli 990 Logarithmus esset (subtractis nempe ex priore 100000) 299,563; & hujus iterum subdecupli 99 Logarithmus 199,563 &c. Sic certè in Chiliadibus Briggianis numero

99000 est 4, 99563, 51946
9900 — 3, 99563, 51946
990 — 2, 99563, 51946
99 denique 1, 99563, 51946.

Quicquid verò hujus sit, tantum commodi tamen ex hac observatione in concinnandis Logarithmis expectandum non est, quantum primo intuitu videri posset, quia numeri inter 1000 & 10000 sunt 9000, quorum Logarithmi essent inveniendi, reliqui verò inter 100 & 1000 non nisi 900, inter 10 & 100 non nisi 90, inter 1 & 10 non nisi 9, adeoq; in universum 999, priorum ne pars nona quidem.

DE-

DEFINITIO XVI.

SI radius AD (Fig. 113.) circa punctum A per peripheriam quadrantis DB æquabiliter circumduci concipiatur; dum interim latus quadrati DC sibi semper parallelum per DA itidem æquabiliter descendit, ita quidem ut eodem momento & radius AD & prædictum latus DC in basin AB incidant; aut (si fortè hoc modò proportio lineæ rectæ ad circularem per quandam principii petitionem supponi videatur) rectâ DA æquè ac quadrante DB in totidem partes æquales (hîc v. g. utrinque in 8) divisis, ductisque per has ex centro A totidemq radiis & perillas parallelis; puncta intersectionum decenter connexa dabunt lineam curvam, cujus inventionem *Dinostrato* & *Nicomedi* ex Lib. IV. *Pappi Alexandrini* tribuunt, quamque ab usu suo τετραγωνίζουσαν h. e. *Quadratricem* appellant, hanc inter cætera proprietatem habentem, ut ex AB abscindat partem AE, quæ sit ad quadrantem DB ejusque radium DA tertia proportionalis: id quod infrà demonstrabitur. Hæc interim fluunt ex ipsa descriptione.

Consectaria.

I.

SI per assumptum in quadratrice quodcunque punctum H ducatur radius AHI, &

ex eodem puncto perpendiculares Hh & He, semper esse totum arcum DB ad partem rescissam IB, ut tota linea DA ad partem abscissam hA vel ei æqualem He.

2. Consequenter ergo arcum quadrantis vel angulum datum quemcunq; v.g. IB aut IAB in 3 partes æquales, aut quotcunq; alias, aut quacunq; deniq; ratione ope quadratricis dividi posse; dummodò educto radio AI, ex puncto quadratricis H demissa perpendicularis Ha, in 3 aut quotcunq; alias partes æquales, aut quacunq; deniq; ratione secetur, & per has ejus sectiones radii ad arcum dividendum emittantur.

LIBRI II.

SECTIO II.

Propositiones Demonstrativas complexa.

CAPUT I.

De Sectionum Conicarum palmariis Proprietatibus.

PROPOSITIO I.

IN Parabola (QKEH Fig. 114.) æquatur (a) quadratum semiordinatæ (IK) rectanguli

(a) I. Proprietas Parab. Apoll. Prop. 11. Lib. I.

angulo (IL) *ex latere recto* (EL) *in abscissum* (EI.)

Demonstratio.

SInt Coni secti latera AB = *a*, BC = *b*, porròque EB = *oa* & EI = *eb*, AC verò = *c*: Erit ergo NI = *ec*, propter △△ BCA & EIN similitudinem; & EP vel IO = *oc*, propter △△ ABC & EBP similitudinem. Ergo ▭ NIO = *oec* = ☐ IK per Schol. Prop. XXXIV. num. 3. & Prop. XVII. Lib. I. Si jam quæratur linea, quæ cum abscissa EI faciat ▭ IL = ☐ IK, habebitur illa, dividendo dictum quadratum per abscissam EI, nimirum $\frac{oec}{eb}$ h. e. $\frac{oc}{b}$ = EL; Et hanc *Latus rectum* dicere colluбuit, sc. ad abscissam EI cum quâ ▭ illud constituit, quod = esse ☐ IK per se patet, & hac ipsâ æqualitate *Parabola* nomen huic Sectioni peperit apud Apollonium.

Consectaria.

I.

INvenietur ergo breviùs etiam hoc latus rectum, quantitate $\frac{oc}{b}$ expressum, si fiat ut

b ad *c*. (Latus coni parallelum sectioni BC ad baseos diametrum AC) sic *oc* (*Latus* EP *primarium* quibusdam dictum) ad quartum.

2. Hanc verò illationem si quis malit cum Apollonio exprimere datis meris in ipso Cono secto (siquidem *oc* sive latus primarium EP non est linea ad ipsum Conum pertinens) facilè perspiciet, si quantitas *Recti lateris* inventa suprà & infrà multiplicetur per latus Coni alterum *a*, proditurum esse æquivalentem $\frac{o.a\,cc}{ab}$ quæ suppeditat loco proportionis superioris hanc aliam:

Ut *ab* — ad *cc* — sic *oa* } ad
□ ex AB in BC — □ AC — EB }

quartum; quæ est ipsissima Apollonii in Prop. XI. Lib. I, hoc ipso nostram illam priorem confirmans.

Scholion I.

HInc praxis describendæ parabolæ planæ & facilior & certior: sc. per semiordinatas plures, quarum extrema puncta decenter connexa parabolæ curvitatem designant. Invenientur autem semiordinatæ quotcunque libuerit, si abscissis in axe quotcunque pro lubitu portionibus, inter latus rectum & singulas abscissas inveniantur totidem proportionales. Vid. infrà n. 2. & 3. Fig. XLVII. Introd. in Analysin speciosam.

Scholion II.

HInc etiam *Genesis Parabolæ* nova in plano ex Dn. de Witt speculationibus nobis subnascitur; si

scil.

ſcil. angulus rectilineus HBG (*Fig.* 155.) circa punctum B fixum mobilis, altero ſuo crure BH juxta regulam EF immotam ex primo ſuo ſitu DBG ita emoveatur, ut regulam HG à primo ſitu DK ſimul emoveat ſibi ſemper parallelam; altero verò crure BG eandem regulam HG perpetuò ſecet, & hoc ipſo ſuo puncto interſectionis à B verſus G continuò excurrente curvam deſcribat. Hanc enim curvam ipſiſſimam veterum Parabolam eſſe futuram, ex eo manifeſtum eſt, quòd eandem hanc primam parabolæ proprietatem habeat. Nam 1. ſi angulus HBG (*num.* 1.) ponatur rectus, & BD vel HI = *a*, BI vel KG = *b*. (in ea ſcriptione ſcilicet anguli & regulæ HG, quâ punctum G ſuâ interſectione deſignant) erit ob angulum ad B rectum, BI, h. e. *b*, media proportionalis inter HI, h. e. *a*, & IG ſive BK, adeoque hæc, tanquam abſciſſa, = $\frac{bb}{a}$. Quare, ſi BK h. e. $\frac{bb}{a}$ ducatur in BD = *a*, rectangulum DBK erit = *bb* = □ KG, quæ eſt ipſa parabolæ proprietas prima: Ut necesse non ſit, cùm eadem illatio circa quodvis aliud in hac curva punctum procedat, hanc eſſe ipſam parabolam, & BD vel HI ejus latus rectum, KG ſemiordinatam, BK axem &c. 2. Si angulus HBG obliquus fuerit (*num.* 2.) facilè oſtenditur ex ſuppoſitis, △△ DBH & BKG eſſe æquiangula: Ergo ut BD (h. e. *a*) ad DH ſ. BI (h. e. *b*) ſic KG ſ. BI (h. e. *b*) ad BK (h. e. $\frac{bb}{a}$.) Ergo rurſum □ DBK = *bb* □ KG. Q. E. D.

Con-

Consect. 3. Patet insimul in secundo hoc casu, BK non per mediam parabolam ductam, sed axi parallelam, esse diametrum, cui vertex suus B, latus rectum BD, semiordinata GK &c. respondeant.

Consect. 4. Habebitur igitur latus rectum in data parabola geometricè, si applicetur semiordinata quæcunque IK, (*Fig.* 116.) & huic æqualis fiat abscissa EF, ex F autem parallela ducatur semiordinatæ IK, & ex E per K recta EK abscindens FH latus rectum quæsitum; cùm sit ut EI ad IK sic EF (h.e. IK) ad FH, per Prop. XXXIV. Lib. I. Ergo & arithmeticè datâ abscissâ & semiordinatâ latus rectum erit tertia proportionalis.

Consect. 5. Cùm verò latus rectum inventum suprà sit $\frac{occ}{b}$, si concipiatur id applicatum in LM, ut N sit illud punctum, quod Apollonius ex comparatione factum recentiores autem focum appellant; erit LN $\frac{occ}{2b}$ ejusque quadratum $\frac{ooc^4}{4bb}$; hoc verò divisum per latus rectum $\frac{occ}{b}$ dabit $\frac{occ}{4b}$ pro abscissa EN: ut *foci distantia à vertice* sit $\frac{1}{4}$ lateris recti.

Consect. 6. Cùm igitur EN sit $= \frac{occ}{4b}$, si pro EF ponatur ib, erit NF $= \frac{ib - occ}{4b}$

cujus

cujus quadratum invenietur $i2b^2 - \frac{oicc}{2} + \frac{o2c^4}{16b^2}$.

Cui si addatur □ GF $= oicc$, per Prop. 1. fiet quadratum NG $= i2b^2 + \frac{oicc}{2} + \frac{o2c^4}{16b^2}$;

cujus radix (prout extractio, & sine hac analogia quadrati NF cum hoc quadrato NG manifestò docet) erit $ib + \frac{occ}{4b}$; ita ut linea

recta ex foco ad extremum ordinatæ ducta semper sit æqualis abscissæ EF + EN, h. e. (si EO fiat æqualis EN) compositæ FO.

Scholion III.

INde verò facilior modus parabolam in plano describendi, dato foco & vertice. Scilicet (*in Fig.* 117.) per verticem E, prolongato axe in O, ut EO sit æqualis EN, si juxta regulam PQ, ad punctum O defixam, norma HI sensim ab OF ad situm HI ita emoveatur à manu G, ut immisso stylo partem fili NGI (quod regulæ HI longitudinem habere debet) huic ipsi regulæ semper velut agglutinatam teneat, (id quod forsan haut incommodè quoque fieret eo circini artificio, quod infrà ad hyperbolam quoque accommodabimus) simulque in plano portionem lineæ EGR describat. Hanc enim esse parabolam patet ex præcedente Consectario; quia, sicut filum totum IGN est semper æquale regulæ IH; ita pars GN ubique necessariò est æqualis parti GH, h. e. lineæ FO. Quin & ex eodem illo Consectario 6. & Fig. 116.

116.) fluit alius modus facilis parabolam dato foco & vertice in plano designandi per puncta innumera G eodem modo invenienda: Nimirum si ex assumpto in axe quovis puncto F educatur ad axem perpendicularis, & intervallo FO ex foco N intersectio in G. Quæ puncta G innumera eadem facilitate determinabuntur dato solum vel assumpto axe & latere recto, virtute ipsius Prop. præsentis. Etenim, si, puncto F in axe pro lubitu assumpto, inter latus rectum & abscissam EF inveniatur media proportionalis, huic æqualis facta semiordinata FG designabit punctum G in Parabola quæsita.

Propositio II.

In Hyperbola (GKEH *Fig. 118.*) *æquatur* (a) *quadratum semiordinatæ* (IK) *rectangulo* (IL) *ex latere recto* (EL) *in abscissam* (EI) *unà cum alio adhuc rectangulo* (LS) *ex eadem abscissa* (EI vel LR) *in* (RS) *quartam proportionalem ad* (DE) *latus transversum* (EL) *latus rectum, &* (EI) *abscissam.*

Demonstratio.

Sit Coni latus AB hîc etiam = *a* & BM sectioni parallela = *b*, & intercepta AM = *c*, EI verò = *eb*; omnia ad analogiam superiorum in parabola: eritque NI, ut ibi = *ec*. Posito verò porrò MC = *d* &

latere

(a) I. Propr. Hyperb. Apoll. Prop. 12. Lib. I.

darere transverso DE = pb, ut DI, sit = ob † eb; essent (propter similitudinem, ΔΔ BMC, DEP, & DIO) EP = od & IO = od † ed, adeoq; QO = ed. Ergo ▭ NIO erit = $oecd$ † $eecd$ = □ IK. Hoc autem quadratum divisum per abscissam EI = eb, dat $\frac{oecd \dagger eecd}{eb}$, sive $\frac{ocd \dagger ecd}{b}$, pro illa linea IS quæ cum abscissa faceret rectangulum ES = quadrato dicto IK. Quod si ergo latus rectum hîc etiam dicamus lineam eodem modo, quo in parabola, inventam, faciendo sc.

Ut b : xz ad c — sic od ad 4tum $\frac{od}{b}$ (ut parallela sectioni ad intercept. diam. — sic latus primar. manifestum est, lat. rectum esse partem alteram inventæ modò lineæ; alteram verò partem $\frac{ecd}{b}$ esse quartam proportionalem ad b, c, & ed, vel ad eb, ec & ed, vel (cum Apollonio loquendo, ut in prop. factum) ad ob, $\frac{ocd}{b}$ & eb (nam in tribus his casibus idem quartum provenit = $\frac{ecd}{b}$.) Quare palpabile nunc est, □ semiordinatæ $oecd$ † $eecd$ æquari rect-

rectangulo IL (quod eſt ex latere recto $\frac{ocd}{b}$ in abſciſſam $eb = \frac{oecd}{b}$) unà cum □ LS quartæ hujus proportionalis $\frac{ecd}{b}$ in eandem abſciſſam eb, quod eſt $= eecd$. Quod erat inveniendum ac demonſtrandum.

Conſectaria.

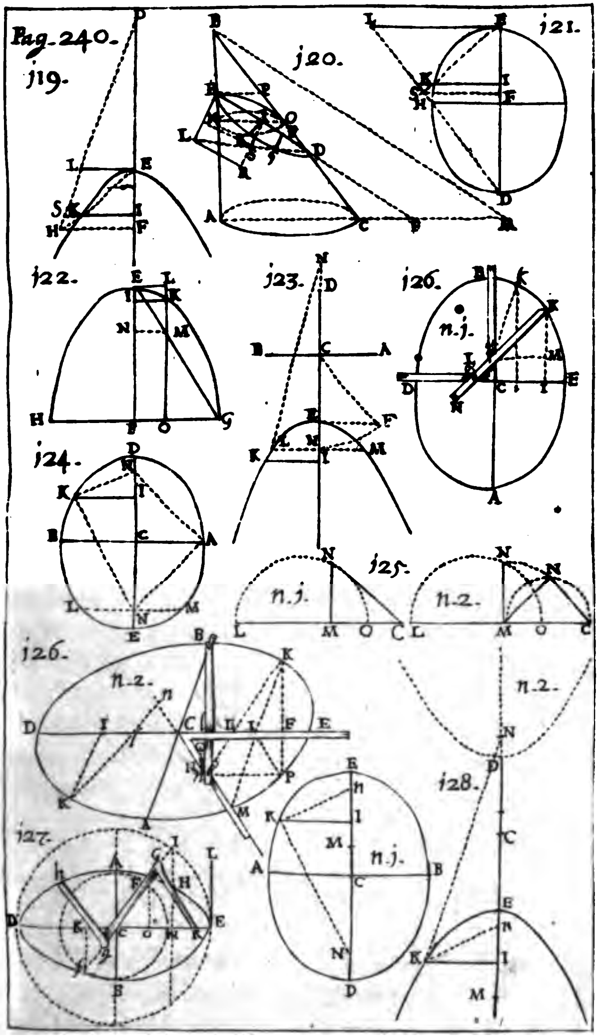
I.

Elucеſcit hinc ante omnia ratio nominis *Hyperbolæ*, quod Apollonius huic Sectioni impoſuit; quia nempe quadratum ordinatim applicatæ IK excedit rectangulum ex latere recto in abſciſſam.

2. Cùm igitur latus rectum hîc etiam, ut in parabola, inventum ſit, faciendo, ut b ad c ſic od ad $\frac{odc}{b}$ (h. e. ut parallela Sectioni BM ad interceptum diam. AM, ſic latus primarium EP ad quartum EL;) ſi quis hoc idem latus rectum malit Apollonii more exprimere, facilè perſpiciet, quantitate illius inventâ, ſuperiùs & inferiùs multiplicatâ per parallelam Sectioni b, prodituram eſſe æquivalentem $\frac{obcd}{bb}$, quæ ſuppeditat loco proportionis ſuperioris hanc aliam:

Ut bb — ad cd — ſic ob } ad
□ BM — □ AMC — Latus transverſum }

quar-


Pag. 240.
119.
120.
121.
122.
123.
126.
124.
125.
126.
127.
128.

quartum; quæ est ipsissima Apollonii in Prop. XII. Lib. I. hoc ipso nostram illam priorem confirmans.

3. Habebitur autem hoc latus rectum etiam geometricè, si quæratur (ut in Parabola factum Consect. 4. Prop. I.) ad abscissam EI (Fig. 119.) & semiordinatam IK (= EF) tertia proportionalis FH; deinceps autem ad DI (Summam lateris transversi & abscissæ,) inventam FH, aut ei æqualem IS, & DE (latus transversum) inveniatur quarta proportionalis EL, rectum latus quæsitum.

Scholion.

Ex hoc ipso 3. Consect. vero reciprocè licebit, dato latere recto & transverso, semiordinatas quamplurimas axi applicare, adeoque Hyperbolam per innumera puncta designare: nimirum si, assumptâ quacunque abscissâ EI, fiat ut DE ad EL sic DI ad IS; deinceps autem inter hanc IS & abscissam EI, quæratur media proportionalis IK, semiordinata quæsita; prout & hæc praxis ex ipsum Consect. adhibito calculo literali, ex abundanti facilè comprobatur.

Propositio III.

In Ellipsi (KDEK Fig. 120.) *æquatur* (a) *quadratum semiordinatæ* (IK) *rectangulo* (IL) *ex latere recto* (EL) *in abscissam* (EI,) *dempto prius alio rectangulo* (LS) *ex eadem abscissa* (EI vel LR) *in* (RS) *quantitam pro-*

Q   *por-*

(a) Propr. Ellipſ. Apoll. Prop. 13. Lib. I.

portionalem ad (DE) *latus transversum* (EL) *latus rectum, &* (EI) *abscissam.*

Demonstratio.

Sit Coni latus AB hîc etiam = a, & BM sectioni parallela = b, & intercepta AM = c, EI verò = eb; eritque NI rursum = ec, omnia ut in hyperbola. Posito porrò & hîc MC = d, & latere transverso DE = ob, ut DI sit = $ob - eb$: erunt (propter similitudinem ΔΔ BMC, DEP & DIO) EP = od & IO = $od - ed$. Ergo □ NIO erit = $oecd - eecd$ = □ IK. Hoc autem quadratum divisum per abscissam EI = eb, dat $\frac{oecd - eecd}{eb}$, sive $\frac{ocd - ecd}{b}$, pro illa linea IS, quæ cum abscissa faceret rectangulum ES = quadrato dicto IK. Quod si ergo latus rectum hîc etiam dicamus lineam eodem modo, quo in parabola, inventam, faciendo scil. juxta Consf. 1. Prop. I.

Ut b ad c — sic od — ad 4tum $\frac{ocd}{b}$

h.e. Parall. sectioni — ad intercept. diam. — sic latus primar. &c. manifestum est, lat. rectum esse partẽ alteram inventæ modò lineæ; alteram

teram verò partem $\frac{ecd}{b}$ esse quartam proportionalem ad b, c & ed, vel (cum Apollonio loquendo, ut in Proposit. factum) ad ob, $\frac{ocd}{b}$ & eb (ubique enim provenit eadem ista quantitas $\frac{ecd}{b}$). Quare palpabile nunc est, □ semiordinatæ IK æquari □ IL (quod est ex latere recto $\frac{ocd}{b}$ in abscissam eb = $\frac{oecd}{b}$) sed dempto prius inde □ LS, sive $\frac{eecd}{b}$ ex quarta illa proportionali $\frac{ecd}{b}$ in eandem abscissam eb; Quod erat inveniendum ac demonstrandum.

Consectaria.

1.

ELucescit hinc ante omnia ratio nominis *Ellipsis*, quod Apollonius huic sectioni imposuit; quia nempe quadratum semiordinatæ IK deficit à rectangulo ex latere recto in abscissam.

2. Cum igitur latus rectum hîc etiam, ut in parabola & hyperbola, inventum sit, faciendo, ut b ad c, sic od ad $\frac{ocd}{b}$ (h. e. ut BM pa-

rallela sectioni, ad interceptam diam. AM, sic latus primarium EP ad quartam EL,) si quis hoc idem latus rectum malit Apollonii more exprimere, facilè perspiciet, quantitate illius inventâ superiùs & inferiùs multiplicatâ per b, prodituram esse æquivalentem $\frac{obcd}{bb}$, quæ suppeditat loco proportionis superioris hanc aliam:

Ut bb — ad cd — sic ob —
BM — □ AMC — Latus transvers. } ad quartum; quæ est prorsus eadem cum ea quam in hyperbola quoq; invenimus, & quam habet Apollonius quoq; Prop. XIII. Lib. I.

3. Habebitur autem hoc latus rectum etiam geometricè, si quæratur, ut in hyperbola, 1. ad abscissam EI (*Fig. 121.*) & semiordinatam IK (= EF) tertia proportionalis FH; 2. verò ad DI (differentiam lateris transversi & abscissæ,) inventam FH, aut ei æqualem IS, & latus transversum DE, quarta proportionalis EL, rectum latus quæsitum.

Scholion.

EX hoc ipso verò 3. Consect. reciprocè licebit, dato latere recto & transverso semiordinatas quàmplurimas axi applicare, adeoque Ellipsin per innumera puncta designare: nimirum, si, abscisâ quacunque EI assumptâ, fiat, ut DE ad EL, sic DI ad quartam IS; deinceps autem inter hanc IS & abscissam EI quæratur media proportionalis IK,

semi-

semiordinata quæsita: prout & hæc praxis, & ipsum Consect. 3. adhibito calculo literali ex abundanti facilè comprobabitur. Hîc enim e. g. quarta proportionalis ad ob, $\frac{ocd}{b}$ & $ob-eb$ erit $\frac{ocd-ecd}{b}$;

& media proportionalis inter hanc quartam & eb erit $\sqrt{oecd-eecd}$ &c.

Propositio IV.

In Parabola (a) sunt quadrata ordinatarum inter se ut abscissæ.

Demonstratio.

Nam, si EF (*Fig. 122.*) dicatur ib, sicut EI suprà vocata fuit eb, cùm latus rectum sit $\frac{occ}{b}$; erit quadrat. FG = $oicc$.

Ergo

□ IK ad □ FG ut } e ad i sive
$oecc$ — $oicc$ } eb ad ib. Q.E.D.

Consectarium.

Hinc ductâ LO parallelâ axi vel diametro EF, si secetur per transversam EG in M, & à curva parabolæ in K; erunt OL, ML, & KL continuè-proportionales. Nam EF est ad EN ut FG ad NM. sive IK, propter △△ EFG & ENM similitudinem. Sed quadrata FG & IK habent duplicatam hujus ra-

Q 3 tionis

(a) II. Proprietas Parab. 20. Prop. Apoll. Lib. I. Con.

CN, distantia foci à centro $= \sqrt{\frac{oodc + oobb}{4}}$.

Sed $\frac{oocd}{4}$ est pars quarta ▭ ex latere transverso ob & recto $\frac{ocd}{b}$ (sive pars quarta figuræ, uti loquitur Apollonius) & $\frac{oobb}{4}$ est □ ex $\frac{ob}{2}$, h. e. lateris transversi dimidio. Invenimus ergo regulam determinandi foci in hyperbola sequentem: *Si quarta pars figuræ (sive rectanguli ex latere recto in transversum) addatur quadratum lateris transversi dimidii, & è Summa extrahatur radix: hæc erit distantia foci à centro, CN: Et hinc ablato dimidio latere transverso CE, habebitur distantia foci à vertice EN.*

Consect. 3.

Similiter in Ellipsi applicatâ LM (*Fig. 124.*) ut focus sit N, EN esse $\frac{aoc\,add}{\sqrt{4bb}}$, ut suprà, & illatione porrò simili ▭ DNE $= \frac{ocd}{4}$. Jam verò ▭ DNE unà cum quadrato distantiæ CN est æquale □ dimidiæ CE *per Prop. 5. VIII. Lib. 2.* & consequenter □ CN est □ $=$ CE $-$ ▭ DNE, hoc est,

est, $\frac{oobb - oocd}{4}$. Quare CN, distantia foci à centro = $\sqrt{\frac{oobb - oocd}{4}}$. Invenimus ergò regulam determinandi foci in Ellipsi sequentem: *Si quartâ pars figuræ*, (sive rectanguli ex recto latere in transversum) *subtrahatur è quadrato dimidii lateris transversi, & è reliquo extrahatur radix; hæc erit distantia foci à centro CN: Et hæc ablata è dimidio latere transverso CE, dabit foci distantiam à vertice, EN.*

Scholion I.

Utraque regula in ipsa praxi facilis est. Cùm enim $\frac{oobb}{4}$ nihil aliud sit quàm quadratum ex CE, $\frac{oocd}{4}$ autem nihil aliud quàm rectangulum ex ½ DE in ½ LM, si inter LM & ½ DE sive MO (*Fig. 125.*) inveniatur media proportionalis MN (cujus adeò quadratum illi ▭ est æquale) & in hyperbola huic adjungatur ad angulos rectos MO = CE, hypotenusa CN erit distantia foci à centro quæsita; eademque in ellipsi habebitur, si (*n. 2.*) super CM = CE descripto semicirculo applicetur inventa media MN, & ducatur CN.

Scholion II.

NAscitur etiam (a) nobis hinc *nova genesis Ellipseos* in plano circa datas diametros, è speculationibus Dn. de Witt; si nimirum circa angulum rectilineum DCB (*Fig.126.n.1.&2.*) immotum regula NLK (quæ tota semidiametrum majorem CB, parte prominente LK verò minorem CD, vel in aliis casibus perpendiculum B*l*, exæquet) ita moveatur, ut N à C versus D, L verò â B versus C decurrentia anguli latera perpetuò stringant; extremo puncto K interim curvam BKE (& in applicatione simili reliquos ejus quadrantes) describente. Hanc enim curvam ita descriptam ipsissimam veterum Ellipsin esse futuram, ex eo constabit, quòd secundam ejus proprietatem modò descriptam habeat. Nam 1. si angulus DCB vel NCB ponatur rectus (ut in Fig. 126. num. 1.) & regula KN in ea statione, quâ designavit punctum K, &c. applicatâ semiordinatâ KI, ductaq; perpendiculari LM, à quadrato KL & quadrato CE (tanquam æqualibus) mente subtrahamus æqualia quadrata LM & CI, restabunt, ibi vi Theor. Pythag. □ KM, hîc per Prop. VIII. Lib. I. ▭ DIE inter se æqualia. Jam verò quadratum KI est ad quadratum KM (h. e. ▭ DIE) ut quadratum KN ad quadratum KL (h. e. ut quadratum CB ad quadratum CE) propter △△ KLM & KNI similitudinem; cùmque idem eodem modo demonstretur de quacunque alia semiordinata K*i*, quòd scil. ejus □ K*i* ad ▭ D*i*E se habeat ut quadratum CB ad quadratum CE: Sequitur etiam □ KI esse ad

(a) De Witt. Elem. curv. Lib. I. Cap. III. Prop. 13.

se ad □ DIE ut □ Ki ad □ DiE; & alternatim, quadratum KI ad quadratum Ki, ut □ DIE ad □ DiE; quæ est secunda Ellipseos proprietas. 2. Si angulus NCE non sit rectus (ut in Fig. 126. n. 2. similibusque casibus) ductis NO & KP parallelis regulæ nlB, in statione prima, [in qua quidem statione angulus NCE, ad quem norma flexibilis est componenda, determinatur, perpendiculum scil. BI ab extremitate unius Diametri in alteram demittendo, & addendo porrò vel demendo differentiam semidiametrorum In] KIM ordinatâ, & PI parallelâ cum CN; quo facto ΔΔ CBl & IKF, pariterque CBn & IKP, erunt similia. Quare junctâ NP, ex parallelismo linearum IP & NC ac similitudine ΔΔ prædictorum, pariterque aliorum NCO, nCl, facilè concluditur NCIP esse Parallelogrammum. Quare, cùm KN sit = CE & □ KN = □ CE, subtractis quadratis æqualium NP & CI, restabunt, ibi □ KP, hîc □ DIE, inter se æqualia, ut suprà. Ergo quadratum KI erit ad quadratum KP (h. e. ad □ DIE) ut quadratum BC ad quadratum Bn (h. e. ad quadratum CE) ut in casu priore: & cùm hîc etiam idem eodem modo demonstrari possit de quacunque alia semiordinata Ki; inferemus ut suprà, □□ KI & Ki esse ad se invicem ut sunt rectangula DIE & DiE &c.

Quo pacto verò per hos angulos rectilineos etiam sine normis & regulis, eædem ellipses per inventa innumera puncta possint describi, ex iisdem figuris palam erit attendentibus. Determinato enim semel angulo NCE vel nCD (num. 2. v. g.) si NL vel nl ope circini, ubicunque lubuerit, applicetur,

& ad K usque continuetur, ita ut LK vel lk sint æquales lB, habebitur ubiq; punctum K &c.

Consect. 4.

Cùm in hyperbola (*Fig. 123.*) □ CN — □ CE = ▭ DNE, & in ellipsi (*Fig. 124.*) □ CE — □ CN = ▭ DNE vi Consect. 2. & 3. hujus; si pro CN utrobiq; brevitatis causâ ponamus m, erit ▭ DNE in hyperbola his terminis $\frac{mm - oobb}{4}$, in ellipsi verò istis, $\frac{oobb}{4} - mm$ rectè quoq; expressum.

PROPOSITIO VI.

In Parabola (a) *est latus rectum ad Summam duarum semiordinatarum* (e. g. IK + FG, h. e. HO *in Fig. 122.*) *ut earundem differentia* (OG) *ad differentiam abscissarum* (IF vel KO.)

Demonstratio.

Nam si abscissa major EF ponatur = ib, minor EI = eb, semiordinatæ ipsis respondentes FG & IK erunt $V\overline{oi\,c\,a}$ & $V\overline{oe\,c\,c}$, juxta deductionem Proposit. I. Quod si igitur ponantur eadem serie

1. La-

(a) IIItia Proprietas Parab.

1 Latus R. — 2 Summa semiord. — 3 Earund. Diff. — 4 Diff. Absc.

$\frac{oex}{b}$ — $\sqrt{oicc}+\sqrt{oecc}$ — $\sqrt{oicc}-\sqrt{oecc}$ — $ib-eb$.

& multiplicentur extrema & media, prodibit idem utrobique factum $oicc-oecc$, arguetque vi Prop. XIX Lib. I. dictorum proportionalitatem. Q. E. D.

Scholion.

ET hæc est illa proprietas Parabolæ, quâ nititur THOMÆ BACKERI *Clavis Geometrica Catholica*, quamque ignotam veteribus, nec animadversam à Cartesio, in causa fuisse putat, quod admirandum illud ingenium in regulas illas universales construendarum æquationum omnium quomodolibet affectarum haut inciderit: qua de re suo loco pluribus. Illud unum solùm hic monendum, ne Backerum quidem primum hujus proprietatis inventorem esse, sed ex ingenioso quodam MSto de Sectionibus Conicis, à *Thoma Strode* sibi communicato, eam hausisse, ut ipsemet ingenuè fatetur.

PROPOSITIO VII.

IN Hyperbola & Ellipsi (a) *est latus rectum ad latus transversum, ut quadrat. cujusq; semi-*

(a) IIItia Proprietas Hyperb. & Ellips. Apoll. Lib. I. Prop. 21. pars prior.

semiordinatæ (e.g. IK *in Figg. 118. & 120.*) *ad rectangulum* (DIE) *contentum lineis inter ipsam ac transversi lateris vertices interceptis.*

Demonstratio.

Nam latus rectum est utrobique $\frac{oecd}{b}$, transversum, *ob* &c. Quod si ergo ponantur in eadem serie

ut Lat. R. ad Lat. transv. sic □ IK ad ▭ DIE

$\frac{ocd}{b}$ — *ob* — in Hyperb: *oecd* + *ceed* — *oebb* + *eebb*

in Ellip. *oecd* — *eecd* — *oebb* — *eebb*

Facta extremorum & mediorum erunt ambo *ooebcd* + *oeebcd*, arguentque adeò dictorum proportionalitatem, per Prop. XIX. Lib. I. Q. E. D.

Consect. 1.

Hinc datis in ellipsi (*Vid. Fig. 124.*) latere recto & axe transverso, habebitur facilè axis secundus sive Diameter secunda, si fiat

ut Lat. transv. ad Lat. R. sic ▭ DCE ad □ AC

ob — $\frac{ocd}{b}$ — $\frac{oobb}{4}$ F. $\frac{oocd}{4}$

Con-

Consect. 2.

ERgo □ totius AB erit = *oocd* = □ ex latere recto in transversum (quod Apollonius *Figuram* vocat:), ut ita secundus axis (& quælibet diameter secunda) sit media proportionalis inter latus rectum & transversum. Hinc eadem denominatio ad Hyperbolam translata, ut diameter secunda sive conjugata dicatur media proportionalis inter latus rectum & transversum, h. e. *Voocd* sive linea quæ potest figuram, velut Apollonius loquitur.

Scholion I.

DErivatur hinc alius ac simplicior modus ellipsin organice circa datos axes AB, DE (*Fig. 127.*) in plano delineandi, quam *Schootenius* nobis dedit; ope scilicet duarum regularum CG & GK æqualium & circa C & G mobilium: Si nimirum portiones GR, & HK sint æquales axi minori dimidio AC, cum utroque verò auctario sumptæ (nempe CF † FG † GH) æquentur axi dimidio majori DC vel CI, & puncto K super producta linea DE perpetuò incedente, punctum H describat curvam EHAD. Hanc enim ellipsin esse patebit vi Prop. hujus VII. ex proprietate curvæ huic in omnibus suis punctis H competente. Ductis enim circulis circa utramque diametrum & IHN, FO perpendicularibus ad DE, factoque EL latere recto, quod est tertium proportionale ad DE & AB, *per Consect. 2. hujus*, &c.

tionis EF ad EN *per Prop. 35. Lib. I.* & habens tamen rationem abscissarum, EF & EI, *per praes.* Ergo FF ad EI habet etiam duplicatam rationis EF ad EN h. e.

$\left\{\begin{matrix} EF \\ OL \end{matrix}\right\}$ est ad $\left\{\begin{matrix} EN \\ ML \end{matrix}\right\}$ ut $\left\{\begin{matrix} EN \\ ML \end{matrix}\right\}$ ad $\left\{\begin{matrix} EI \\ KL \end{matrix}\right\}$ Q. E. D.

PROPOSITIO V.

IN Hyperbola & Ellipsi (a) sunt quadrata ordinatarum, ut rectangula contenta lineis, quae inter ipsas & vertices transversi lateris interjiciuntur.

Demonstratio.

NAm, si EF (*Fig. 118. & 120.*) dicatur *ib*, sicut EI suprà vocata fuit *eb*, erit juxta Prop. II. ac III. deductionem

GF = *oicd* + *eicd* in hyperb.
oicd — *eicd* in ellipsi;
& ▭ DFE = *oibb* + *iibb* in hyperb.
oibb — *iibb* in Ellipsi.

Ergo □ KI est ad □ GF ut *oecd* + *eecd* ad *oicd* + *iicd* h. e. ut *oe* + *ee* ad *oi* + *ii*.

Et ▭ DIE ad ▭ DFE, ut *oebb* + *eebb* ad *oibb* + *iibb* h. e. similiter ut *oe* + *ee* ad *oi* + *ii*. Q. E. D.

(a) II Proprietas Hyperbolae & Ellips. Apoll. 21. Lib. I.

Consectaria.

1.

IN Ellipsi seorsim res hæc commodiùs ita exprimeretur: Quadrata ordinatarum (KI & GF) sunt ut rectangula sub segmentis diametri (nempe DIE & DFE;) quo sensu esset hæc proprietas etiam circulo communis, utpote in quo quadrata ordinatarum semper æqualia sunt rectangulis è segmentis.

Consect. 2.

ERgo, si latus rectum concipiatur applicatum in hyperbola, ut N sit focus; (*Vid. Fig.* 123.) erit LN = $\frac{oocd}{2b}$; ejusq; quadrat. = $\frac{ooccdd}{4bb}$. Sed, ut □ KI ad quadratum LN, sic est □ DIE ad □ DNE, h.e. $obcd + eecd$ ad $\frac{ooccdd}{4bb}$ sic $aebb + eebb$. ad $\frac{oocd}{4}$.

Jam verò □ ex tota DE & adjecta EN in adjectam EN, h. e. □ DNE (= $\frac{oocd}{4}$) unà cum quadrato dimidiæ CE (= $\frac{oobb}{4}$) est = □ compositæ ex dimidia & adjecta CN = $\frac{oocd + oobb}{4}$ per Prop. IX. Lib. I. Quare

CN, distantia foci à centro = $\sqrt{\frac{oodc+oobb}{4}}$.

Sed $\frac{oocd}{4}$ est pars quarta □ ex latere transverso ob & recto $\frac{ocd}{b}$ (sivè pars quarta figuræ, uti loquitur Apollonius) & $\frac{oobb}{4}$ est □ ex $\frac{ob}{2}$, h. e. lateris transversi dimidio. Invenimus ergo regulam determinandi foci in hyperbola sequentem: *Si quarta pars figuræ (sive rectanguli ex latere recto in transversum) addatur quadratum lateris transversi dimidii, & è Summa extrahatur radix, hæc erit distantia foci à centro, CN: Et hinc ablato dimidio latere transverso CE, habebitur distantia foci à vertice EN.*

Consect. 3.

Similiter in Ellipsi applicatâ LM (*Fig. 124.*) ut focus sit N, LN esset $\sqrt{\frac{ooccdd}{4bb}}$, ut suprà, & illatione porrò simili □ DNE = $\frac{oocd}{4}$. Jam verò □ DNE unà cum quadrato distantiæ CN est æquale □ dimidiæ CE *per Propos. XLIV. Lib. I.* & consequenter □ CN est □ = CE − □ DNE, hoc est,

est, $\frac{oobb - oocd}{4}$. Quare CN, distantia foci à centro = $\sqrt{\frac{oobb - oocd}{4}}$. Invenimus ergò regulam determinandi foci in Ellipsi sequentem: *Si quarta pars figuræ*, (sive rectanguli ex recto latere in transversum) *subtrahatur è quadrato dimidii lateris transversi, & è reliquo extrahatur radix; hæc erit distantia foci à centro CN: Et hæc ablata è dimidiò latere transversò CE, dabit foci distantiam à vertice, EN.*

Scholion I.

UTraque regula in ipsa praxi facilis est. Cùm enim $\frac{oobb}{4}$ nihil aliud sit quàm quadratum ex CE, $\frac{oocd}{4}$ autem nihil aliud quàm rectangulum ex $\frac{1}{2}$ DE in LM, si inter LM & $\frac{1}{2}$ DE sive MO (*Fig. 125.*) inveniatur media proportionalis MN, (cujus adeò quadratum illi ▭ est æquale) & in hyperbola huic adjungatur ad angulos rectos MO = CE, hypotenusa CN erit distantia foci à centro quæsita; eademque in ellipsi habebitur, si (*n. 2.*) super CM = CE descripto semicirculo applicetur inventa media MN, & ducatur CN.

Demonstratio ocularis.

Quæ tota in eo consistit, ut quærantur lineæ KN & Kn ope triangulorum rectangulorum IKN & IKn (sc. hypotenusæ ex datis lateribus) & postmodum videatur, an utriusque Summa in ellipsi, & differentia in hyperbola, sit = ob, h. e, axi transverso DE.

I. In Ellipsi.

Ponendo pro CN (quæ suprà Prop. V. Conf. 3. reperta fuit $\sqrt{\frac{oobb - oocd}{4}}$) interim, m; erit

$$IN = CI + CN = \tfrac{1}{2}ob - eb + m$$
$$In = CN - CI = m - \tfrac{1}{2}ob + eb$$

Ergo □ IN = $\tfrac{1}{4}oobb - oebb + eebb + obm$
$(- 2ebm + mm$

□ In = $\tfrac{1}{4}oobb - oebb + eebb - obm$
$(+ 2ebm + mm$

Addatur nunc utrique □ IK, quod in Proposit. VII. Consect. 8. repertum fuit in ellipsi = $oebb - eebb - \frac{4emm}{o} + \frac{4eemm}{oo}$; & habebitur

□ KN

$\square KN = \frac{1}{4}oobb + obm - 2ebm + mm$
$\quad - \frac{4emm}{o} + \frac{4eemm}{oo}$

$\square Kn = \frac{1}{4}oobb - obm + 2ebm + mm$
$\quad - \frac{4emm}{o} + \frac{4eemm}{oo}$

Ex his autem extrahendo decenter radices (quod facillimum quidem) prodibit

$KN = \frac{1}{2}ob + m - \frac{2em}{o}$, &

$Kn = \frac{1}{2}ob - m + \frac{2em}{o}$;

Summa ob. Q.E.D.

II. *In Hyperbola.*

Ponendo pro CN (quæ suprà Consect. 2. Prop. V. inventa fuit $\sqrt{oode + \frac{oobb}{4}}$ iterum m; erit

$IN = CI + CN = \frac{1}{2}ob + eb + m$

$In = CI - Cn = \frac{1}{2}ob + eb - m$. Ergo

$\square IN = \frac{1}{4}oobb + oebb + eebb + obm$
$\quad + 2ebm + mm$.

$\square$ In $= \frac{1}{4}oobb + oebb + eebb - obm$
$(-2ebm + mm.)$

Addatur nunc utrique $\square$ IK, quod in Prop. VII. Consect. 8. repertum fuit in hyperbola $\underset{o}{\underline{4emm}} + \underset{oo}{\underline{4eemm}} - 2ebb - eebb$;

& habebitur

$\square$ KN $= \frac{1}{4}oobb + obm + 2ebm + mm$
$(+ \underset{o}{\underline{4emm}} + \underset{oo}{\underline{4eemm}}$.

$\square$ Kn $= \frac{1}{4}oobb - obm - 2ebm + mm$
$(+ \underset{o}{\underline{4emm}} + \underset{oo}{\underline{4eemm}}$.

Ex his autem extrahendo decenter radices (quod iterum facillimum) prodibit

KN $= \frac{1}{2}ob + m + \underset{o}{\underline{2em}}$;

Kn $= \frac{1}{2}ob - m - \underset{o}{\underline{2em}}$ (quæ radix est falsa & impossibilis, esset enim CE−CN & insuper −aliâ quantitate)

Vel Kn $= m + 2em - \frac{1}{2}ob$; quæ vera est & possibilis.

Differentia igitur verarum radicum $= ob$.
(Q.E.D.

Scholion I.

TEntaveramus primùm hanc demonstrationem literalem, adhibendo quadrati IK quantitatem, qualiter Prop. II. & III. fuerat expressa, & quantitatem IN, prout illa ex CI = $ab + eb + CN$ = $\sqrt{\frac{oocd + oobb}{4}}$ &c. componebatur: Sed res erat tædii plenissima in faciendis tantùm quadratis IN & In. Deinde quantitati surdæ CN substituimus aliam m, produximusque quadrata IN & In ut suprà, sed addidimus quadrat. IK in valore suo antiquo; quo pacto quadrata KN & Kn obtinuimus, sed iis terminis, è quibus exactæ radices extrahi non poterant, sed ut quantitates surdæ erant exhibendæ, & consequenter ad Summam vel differentiam earum eliciendam iis utendum regulis, quas Confect. 3. Prop. VII. & Confect. Prop. X. Lib. I. inveneramus. Id verò, tametsi tandem successurum, plenum tamen adhuc laboris erat ac tædii. Tandem igitur, cùm alteros illos terminos quadrat. IK exprimentes adhiberemus, ex voto res successit & planâ viâ, nec sine magna nostra voluptate, quam nobiscum, spero, sentiet, qui alias ejusdem rei demonstrationes, per ambages & indirectè ad veritatem hanc ducentes, perspexerit, vel etiam illas viderit, quas nobis dedit *Joh. de Witte* in Elem. Curvarum Lin. p. m. 293. & 302. quasque ipse tamen intuitu aliarum à veteribus recentioribusve datarum satis & breves & simplices esse reputat, & nos antehac in hanc adhuc distinctiorem formam, nostris Schematismis accommodatam, redegimus.

Præparatio pro Hyperbola.

Fiat ut $\left\{\begin{array}{l}\text{CD ad CN}\\ \text{CE — C}n\end{array}\right\}$ sic CI ad CM

ita ut □ $\left\{\begin{array}{l}\text{DCM}\\ \text{MCE}\end{array}\right\}$ sit = □ $\left\{\begin{array}{l}\text{NCI}\\ n\text{CI.}\end{array}\right.$

Quia ergo est per Consect. 7. Prop. VII.

ut □ CD ad □ DNE; sic □ DIE ad □ IK

erit etiam componendo,

ut □ CD ad $\left\{\begin{array}{l}\square\ \text{CD} + \square\ \text{DNE}\\ \text{h.e.}\ \square\ \text{CN per 9. L.1.}\end{array}\right\}$ ita DIE ad DIE † □ IK

Ergo per Syllepsin,

ut □ CD ad □ CN, sic $\left\{\begin{array}{l}\square\ \text{CD} + \text{DIE}\\ \text{h. e.}\ \square\ \text{CI}\end{array}\right\}$ ad □ CN † DIE † □ IK.

Sed est etiam per Hypothesin,

ut □ CD ad □ CN; sic □ CI ad □ CM. Ergo □ CM est = □ CN † DIE † □ IK.

Demonstratio.

Cùm ergò certum sit, differentiam inter DM & EM esse transversum axem DE; si demonstretur DM esse = KN, & EM = K*n*, confecta res erit, quòd differentia inter KN & K*n* etiam sit axis transversus DE.

Resolvatur □ *KN.*

Certum est NI*q* † IK*q* = KN*q*.

Substitue pro NI*q* per 7. Lib. I. CI*q* † CN*q* † 2NCI

erit

Præparatio pro Ellipsi.

Fiat ut CD ad CN, sic CI ad CM

ita ut ▭ DCM = sit ▭ NCI.

Quia ergo est per Consect. 7. Prop. VII.
ut □ CD ad ▭ DNE, sic ▭ DIE ad □ IK;
erit etiam dividendo,
ut □ CD ad { □ CD — DNE h.e. □ CN per 8. L. 1. } ita DIE ad DIE − □ IK.
Ergo per Dialepsin,
ut □ CD ad □ CN, sic { □ CD — ▭ DIE h.e. CI □ per 8. cit. } ad □ CN − DIE † □ IK.
Sed est etiam per Hypothesin,
ut □ CD ad □ CN; ita □ CI ad □ CM:
Ergo □ CM est = □ CN — DIE † □ IK.

Demonstratio.

Cùm ergo certum sit, Summam ex DM & EM esse transversum axem DE; si demonstretur, DM esse = KN, & EM = K*n*, confecta res erit, quòd Summa ex KN & K*n* itidem sit æqualis axi transverso DE.

Resolvatur □ *KN.*

Certum est N I*q* † IK*q* = KN*q*.
Substitue pro NI*q* per 7. Lib. I. CI*q* † CN*q* † 2 NCI

R 5 erit

erit $CIq + CNq + 2NCI + IKq = KNq$.

Substitue pro CIq, per 9. L.I. $CDq + DIE$; erunt

$CDq + DIE + CNq + 2NCI + IKq = KNq$.

Resolvatur etiam D M.

Certum est $CMq \left\{ \begin{matrix} 2DCM \\ 2NCI \end{matrix} \right\} = DMq$, per 7. Lib. I.
$+ CDq +$

Substitue pro CMq ejus valorem ex præparatione, & erunt

$CNq + DIE + IKq + CDq + 2NCI = DMq$:

quæ eadem antè fuerant $= KNq$.

Ergo $KN = DM$; quod est unum.

Similiter resolvatur □ K n.

Certum est $nIq + IKq = Knq$.

Substitue pro nIq, per Consect. 1. Proposit. X. Lib. I. $CIq + CNq - 2nCI$, eruntque

$CIq + CNq - 2nCI + IKq = Knq$.

Substitue pro CIq, per 9. Lib. I. $CDq + DIE$, erunt

$CDq + DIE + CNq - 2nCI + IKq = Knq$.

Resolvatur etiam □ E M.

Certum est $2CDq + 2CMq - DMq = EMq$, per XIII. Lib. I.

Sub-

erit $CIq + CNq + 2NCI + IKq = KNq$.
Substitue pro CIq, per 8. L. I. $CDq - DIE$; erunt

$$CDq - DIE + CNq + 2NCI + IKq = KNq.$$

Resolvatur etiam □ DM.

Certum est $\begin{matrix} CMq \\ + CDq + \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2DCM \\ 2NCI \end{matrix} \right\} = DMq$, per 7. Lib. I.

Substitue pro CMq ejus valorem ex præparatione, & erunt

$$CNq - DIE + IKq + CDq + 2NCI = DMq:$$

quæ eadem antè fuerant $= KNq$.
Ergo $KN = DM$; quod est unum.

Similiter resolvatur □ Kn.

Certum est $nIq + IKq = Knq$.
Substitue pro nIq per Consect. 1. Proposit. X. Lib. I. $CIq + CNq - 2nCI$, eruntque

$$CIq + CNq - 2nCI + IKq = Knq.$$

Substitue pro CIq, per 8. Lib. I. $CDq - DIE$, erunt

$$CDq - DIE + CNq - 2nCI + IKq = Knq.$$

Resolvatur etiam □ EM.

Certum est $2CDq + 2CMq - DMq = EMq$, per XIII. Lib. I.

Sub-

Substitue valorem DMq suprà primò inventum, erunt

$$CDq + CMq - 2nCI = EMq.$$

Substitue pro CMq valorem ex præparatione, eruntque

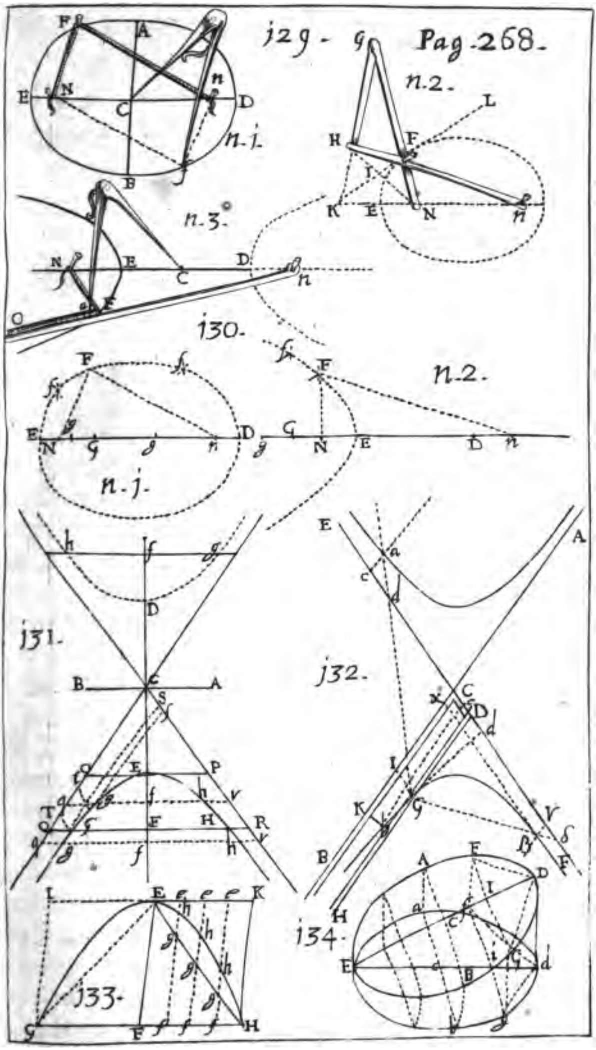
$$CDq + CNq + DIE - 2nCI + IKq = EMq:$$

quæ eadem antè fuerunt $= Knq$.

Ergo $Kn = EM$; quod est alterum.

Scholion II.

NAscuntur hinc vulgares modi mechanici Ellipsin & Hyperbolam circa datos axes sive extremas diametros in plano delineandi. Et Ellipsin quidem, si foci N, N (*Fig. 129. n. 1.*) dati sint, aut juxta Consect. 3. Prop. VII. inventi, ibique defixis paxillis alligetur filum N F n axi majori DE præcisè æquale, ac stylus intra △ fileum æquali semper vi tensum circumducatur. Quia enim fili portiones perpetuò manent toti axi DE æquales; patet propositum, per Prop. præsentem, cui multum insuper gratiæ accedere potest à circino pinnato, quem nobis describit *Svventerus*, in Delic. Physico-Math. Part. II. Prop. XX. Quod idem organica quoque machinatione obtinebitur, ope duarum regularum in focis mobilium GN & Hn, (n. 2.) æqualium axi transverso DE, & supernè transversâ regulâ GH, quæ focorum distantiam exæquet, connexarum; prout ex figura patet. Nam si intra fissuras regularum decussatarum Hn & GN stylus F ritè circumducatur, descriptam inde curvam esse Ellipsin


129.
Pag. 268.
n.1.
n.2.
n.3.
130.
n.2.
n.1.
131.
132.
133.
134.

Substitue valorem DMq suprà primò inventum, erunt

CDq † CMq — 2nCI = EMq.

Substitue pro CMq valorem ex præparatione, eruntque

CDq † CNq — DIE † IKq — 2nCI = EMq:

quæ eadem antè fuerant = K$n$$q$.

Ergo Kn = EM; quod est alterum.

psin ex modò demonstrata proprietate, quam in quovis puncto F habet, constabit. Triangula HGN enim & NHn, quæ latus HN commune & reliqua ex constructione æqualia habent, sunt totaliter æqualia, adeoque anguli FHN, & FNH æquales, consequenter etiam crura HF & FN, & sic FN & Fn simul æquales Hn = DE: quæ est ipsissima Ellipseos proprietas, quæ nunc est sub manibus. Monet autem, qui hanc nos delineationem docuit *Schootenius*, utiliter, si per punctum lineæ HN medium I ducatur IFL hanc tangere Ellipsin in puncto F; siquidem, cùm anguli IFH & IFN per modò dicta sint æquales, alterius IFH verticalis LFn alteri IFN necessariò sit æqualis: hæc angulorum æqualitas autem, quos linea KL per F ducta cum utraque ex centris educta facit, hîc contactûs signum sit, ut in circulo angulorum æqualitas cum linea ex unico centro ducta. Ut hoc pacto, per datum quodcunque punctum Ellipseos F tangentem etiam absque hoc organico regularum apparatu ducere liceat; si nimirum eductis ex utroque foco per datum punctum F rectis nH, NG

trans-

transverso lateri DE æqualibus, HN in I bisecetur & IFL ducatur: Vel etiam, si extrema GH connectens linea producatur in K, & inde KFL ducatur, eo scil. casu ubi GH & Nn non sunt parallelæ; aliàs per punctum F educta iisdem parallela, foret contingens quæsita.

Hyperbolam verò quod attinet, ejus quoque delineandæ modus mechanicus, istis haut absimilis respondet ex proprietate simili, ab eodem *Schootenio* communicatus: Si nimirum inventis focis N & *n*, (*Fig. 129. n. 3.*) alligetur filum NFO in foco N & extremitate regulæ *n*O, ejus præcisè longitudinis, quam superet dicta regula *n*O longitudine transversi axis DE; deinde verò immissus stylus vel etiam circini pes mobilis (nec enim huic etiam praxi accommodare superius artificium adeò difficile fuerit) ducatur intra filum NFO ab O versus E, sic ut pars fili FO semper agglutinata quasi hæreat regulæ. Nam si longitudinem fili dicamus X, & axem transversum *ob* ut suprà, erit regula *n*O per hyp. = X † *ob*. Ponatur nunc portio fili OF = ½ X, erit residuum NF = ½ X & *n*F = ½ X † *ob*, differentia inter FN & F*n* = *ob*. Ponatur OF = ¾ X, erit FN ¼ X & F*n* ¼ X † *ob*, differentiâ adhuc manente *ob*, & sic in infinitum. Breviùs: Cùm differentia totius fili ac totius regulæ sit *ob*, inter ducendum autem semper idem OF utrique auferatur, residuorum perpetuò eadem erit differentia. Hinc etiam assumptis pro arbitrio punctis N & *n* describentur hyperbolæ, dummodò filum NFO fuerit brevius regulâ *n*FO: nam si esset æquale, describeretur recta linea perpendicularis ad N*n*, per medium punctum C.

Unus

Unus adhuc ex dictis nobis subnascitur modus Ellipses & Hyperbolas in plano ducendi per inventa puncta plurima sine filorum aut organorum apparatu. Nimirum in Ellipsi datis vel assumptis axe transverso DE & focis N ac *n*, (*Fig. 130. n. 1.*) si ex N intervallo arbitrario non majore tamen dimidio axe transverso NF fiat arcus, servatâque circini aperturâ ex diametro transversa resecetur EG, captoque mox residuo intervallo GD ex *n* fiat arcus alius priorem secans in F, habebimus unum punctum Ellipseos; eodemque modo inveniemus innumera alia *f, f, f* &c.

Similiter in Hyperbola delineanda datis vel assumtis axe transverso DE & focis N ac *n*, (*n. 2.*) si ex N intervallo arbitrario NF fiat arcus, servataque circini aperturâ ex diametro continuatâ resecetur EG, captoque mox intervallo GD ex *n* fiat arcus alius priorem secans in F, habebimus unum Hyperbolæ punctum; eodemque modo inveniemus innumera alia *f, f,* &c.

PROPOSITIO IX.

SI axis Hyperbolæ secundus, sive Diameter conjugata AB (Fig. 131.) applicetur ad verticem E παραλλήλως, ut Hyperbolam contingat, & OE, EP sint æquales, velut BC, AC, ex centro C autem per O & P ducantur rectæ indefinitè excurrentes, tandemq; QR ducatur parallela tangenti OP; sequentia inde promanabunt.

Con-

Consectaria:

I.

POrtiones QG & HR, inter curvam & rectas illas CQ, CR interceptas, æquales esse; siquidem ex ΔΔrum CEP ac CFR, item CEO, CFQ similitudine, uti CE est ad EO (& EP) ita CF esse ad FQ & FR, adeoque has æquales esse; ablatisque adeò semiordinatis FG & FH pariter æqualibus, etiam residua GQ & HR esse æqualia, & consequenter ⊏⊐ ⊏⊐ QGR, GRH &c. omnia inter se æqualia: id quod in certo casu jam superiùs Consect. 2. ac 3. Definit. VII. erat deductum.

2. Rectangulum QGR ≍ esse □ EO vel EP, ≍ $\frac{oocd}{4}$, h.e. (ut Apollonius loquitur) quartæ parti figuræ: nam propter ΔΔ CEO, CFQ similia, est ut CE ad EO, sic CF ad FQ

h. e. ut □ CE ad □ EO
h. e. (per Consf. 2. VII.) ut Lat. transverf. ad Lat. R
h. e. (per ipsam Prop. VII.) ut ⊏⊐ DFE ad □ FG
} ita □ CF ad □ FQ.

Jam verò, si ex □ CF auferatur ⊏⊐ DFE, restat □ CE, per Prop. IX. Lib. I. & si ex quadrato FQ auferatur □ FG, restat ⊏⊐ QGR, per Prop. VIII. Lib. I. Quare residuum illud quadratum CE ad hoc residuum ⊏⊐ QGR; etiam erit, ut erat totum quadratum CF ad

totum

totum quadratum FQ, per Proposit. XXVI. Lib. I, h. e. ut erat quadrat. CE ad quadrat. EO: consequenter ▭ QGR & quadrat. EO (ad quæ idem quadrat. CE eandem rationem habet) erunt inter se æqualia.

3. Hoc idem vero cùm de quovis alio rectangulo *qgr* aut *grh* &c. eodem modo certum sit; consequitur, omnia talia rectangula inter se æqualia esse.

4. Evidentissimum ergo, cùm lineæ FR, *fr* &c. atque adeò GR & *gr* tantò magis excrescant, quò longiùs à vertice E recesserint; ex opposito rectas QG & *qg* magis magisque decrescere, atque adeò rectam CQ curvæ EG magis magisque appropinquare.

5. Quod autem non possint penitus coire, tametsi productæ in infinitum, breviter ita patet: Si possibile esset alicubi fieri concursum, sic ut punctum G & Q vel *g* & *q* coinciderent, sequeretur ex Consect. 2. ut ▭ DFE ad quadrat. FG sic esse quadrat. CF ad quadratum FQ h. e. ad idem quadrat. FG; atque adeò ▭ DFE = esse quadr. CF; quod est absurdum, per Prop. IX. Lib. I: Ut nunc demum plenariè constet, lineas COQ ac CPR, ex præscripto Consect. 1: ductas, verè rectèque ἀσυμπτώτους (*a*) h. e. *nunquam coincidentes*, (intellige cum Hyperbolæ curva) ab Apollonio dictas esse.

6. Ductis rectis ex G & *g* cum utraque asymptoto parallelis GS & *gs*, pariterque

(*a*) Appll. Prop. 1. Lib. II.

GT & gt, rectangula TGS & tgs erunt (α) inter se æqualia. Nam propter △△ TQG, tqg similitudinem, erit *primò* TG ad QG ut tg ad qg; &, propter □□rum QGR & qgr æqualitatem, *secundò* QG ad gr uti reciprocè qg ad GR, per Prop. XIX. Lib. I. & propter similitudinem △△ SGR & sgr *tertiò* ut gr ad gs, ita GR ad GS. Quamobrem (cùm in duabus seriebus sint

	1.	2.	3.
ut TG ad	QG ad	gr ad	gs
sic tg ad	qg ad	GR ad	GS)

erunt etiam ex æquo ut TG ad gs, sic tg ad GS, per Prop. XXIV. Lib. I. Ergo per Prop. XVIII. ejusd. □ ex TG in GS = □ ex tg in gs. Q.E.D.

Scholion.

ATque hinc demum nova genesis Hyperbolæ in plano circa datas diametros, è speculatione (β) Domini de Witt, nobis subnascitur; si nimirum ductis decussatim lineis AB & EF (*Fig.* 132.) pro lubitu, angulo BGF conformetur angulus mobilis BCD (in opposita Hyperbola delineanda contiguo ACD æqualis acd) cujus alterum crus indefinitè extensum, alterum autem CD arbitrariæ sit longitudinis; & hujus extremo D applicata sit crena regulæ GD circa punctum G, intervallo GD arbitrario, (sed cruri CB tamen in hac prima statione parallelo) definitum, in orbem mobilis, & angulum BCD mobilem juxta lineam

(α) Apollon. Prop. 12. Lib. II.

(β) De Witt. Elem. curv. Lib. I. Cap. II. Prop. 3.

lineam ECF sic unà provehens, ut crus CD huic semper adhæreat, alterum autem CB in progressu à regula GDH intersecetur, e. g. in *b* vel *β*. Hoc enim intersectionis punctum, ita continuo ductu promotum, describet curvam *b* G *β*, quam Hyperbolam esse sic ostendimus: Quia regula GDH circa polum G conversa, & à D v. g. in *d* vel *δ* promota, crus anguli mobilis CB interea in situm *cb* vel *γ β* delatum, sibique interim perpetuo parallelum, necessariò secat; ductis è punctis intersectionum *b* & *β*, & G lineis GI, *b* K & *β* *κ* regulæ CF parallelis, quia v. g. in statione secunda, ablato ex æqualibus CD & *c d* communi *c*D, residua C*c* & D*d* sunt æqualia, & propter similitudinem △△ *d c b* & *d* DG, est

ut D*d* ad DG, sic *d c* ad *c b*;
h.e. C*c* h.e. DG
vel *bk* vel GI

erit rectangulum ex K*b* in *bc* = ▭ ex DG in GI per Prop. XVIII. Lib. I. similiterque, cùm in statione tertia æqualibus CD & *γ δ* addito communi D*γ*, totæ lineæ D*δ* & C*γ* sint æquales, &, propter △△ *β γ δ* & GD*δ* similitudinem est

ut D*δ* ad DG, sic *γ δ* ad *γ β*;
h.e. C*γ* h. e. DG
vel *β κ* vel GI

erit ▭ ex *κ β* in *β γ* = ▭ ex DG in GI per eandem Proposit. XVIII. Quare tria puncta, *b*, G, *β* (& sic omnia alia eodem modo determinanda) sunt in hyperbola, cujus ἀσύμπτωτοι sunt CB & CF, C verò centrum &c. per Prop. præc. Consect. 6. Q. E. D.

Possunt autem curvæ hujus innumera puncta etiam sine motu hactenus præscripto separatim determinari, v. g. punctum *a* in opposita hyperbola; si per assumptum quodcunque punctum *c*, in asymptoto CE, ducatur parallela alteri ἀσυμπτώτων CA, factaque *c d* æquali CD, ex G per *d* ducatur G *d a*, & sic in aliis.

CAPUT II.

De
Spatiis Parabolicis, Hyperbolicis & Ellipticis.

PROPOSITIO X.

Spatium (a) Parabolicum (h. e. in Fig. 133. rectâ GH & Parabolâ GEH comprehensum) est ad parallelogrammum circumscriptum GK, ut 4 ad 6 (sive 2 ad 3) ad △ inscriptum GEH autem, ut 4 ad 3.

Demonstratio.

Ponatur FH divisa primùm in duas deinde porrò in 4 partes æquales, ductæque axi EF parallelæ *e f*, *e f*, &c. Ponendo igitur pro EF quoque 4, erit *f g* prima 3, secunda 2, tertia 1, per Propos. XXXIV. Lib. I. Sed ut *e f* est ad *g e*, sic *g e* ad *h e*, per

(a) Archim. de quadrat. Parab. Prop. 17. & 24.

per Consect. 1. Prop. IV. Ego *he*, in ipsa diametro EF est = *o*, in prima *ef* = $\frac{1}{4}$ (nam *ef*, 4, ad *ge*, 1, sic *ge*, 1, ad *he*, $\frac{1}{4}$) in secunda *ef* portio *he* = $\frac{4}{4}$, in tertia $\frac{9}{4}$, adeoque portiones *eh* in trilineo E*h* HK constituunt seriem in progressione arithmetica duplicata 1, 4, 9, 16: Eodemque modo, si partes F*f* &c. bisecentur, reperientur portiones *eh* in trilineo externo constituere seriem numerorum $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{9}{8}$, $1\frac{6}{8}$, $2\frac{5}{8}$, $3\frac{6}{8}$, $4\frac{9}{8}$, $6\frac{4}{8}$, & sic porrò. Quamobrem cùm portiones *eh* sive indivisibilia trilinei parabolæ circumscripti perpetuò sint in progressione arithmetica duplicata; Summa horum omnium, ad Summam totidem indivisibilium parallelogrammi FK, lineæ KH æqualium, h. e. ipsum trilineum ad hoc parallelogrammum, est ut 1 ad 3, per Consect. 10. Prop. XXI. Lib. I. Erit ergo semiparabola FE*h*H ut 2 & △ FEH ut $1\frac{1}{2}$: Ergo tota parabola ut 4 & totum △ GEH ut 3, totumque parallelogrammum GK ut 6, Q. E. D.

Consect. I.

PAtet autem ex ipsa deductione, (*a*) in divisione prima secundam lineam *fh* (h. e. è medio baseos FH eductam) esse partium 3, qualium FE est 4; nam *eh* est $\frac{4}{4}$ i. e. 1 ergo *fh* 3.

(*a*) Archim. Prop. 19. cum Coroll.

Consect. 2.

PAlam quoque est procedere demonstrationem de quolibet etiam segmento parabolico.

PROPOSITIO XI.

SPatium ellipticum (a) ellipsi DAEB (Fig. 127.) comprehensum, est ad circulum axe transverso DE descriptum, ut axis rectus AB ad ipsum axem transversum DE.

Demonstratio.

PAtet hoc inprimis ex genesi ellipseos Schol. I. Prop. VII. deducta. Nam in illa deductione ostensum est, FO h. e. HN esse ad NI ut AB ad DE: idemque cùm verum sit de omnibus aliis indivisibilibus HN & IN sic ordinatim applicatis, in infinitum; manifestum est ipsa plana, hæc indivisibilia eâdem perpetuò proportione complexa, habere eandem inter se rationem, quam axis rectus AB ad transversum DE. Q.E.D.

Consect. I.

ELlipseos igitur quadratura constabit, si quadratura circuli demonstrata sit.

Con-

(a) Archim. Lib. de Conoid. &c. Prop. 5.

Consect. 2.

Cùm circulus diametro minore AB descriptus sit ad circulum Diametro majore DE descriptum, ut AB ad tertiam proportionalem, per Proposit. XXXV. Lib. I; sequitur vi Prop. præs. ellipsin esse proportione mediam inter circulum minorem & majorem, h. e. ut ipsa est ad majorem, sic minorem esse ad ipsam, nempe ut AB ad DE.

Consect. 3.

Hinc praxis determinandi aream ellipseos gemina nasceretur 1. nempe si inventâ areâ circuli majoris inferretur: Ut major ellipseos diameter ad minorem, sic area circuli inventa, ad ellipseos aream quæsitam. 2. Si inventâ etiam areâ minoris circuli, inter hanc & aream majoris inveniretur media proportionalis.

Scholion.

Clausulam Consect. 2. etiam hoc modo quasi ad oculum licet ostendere 1. si circa ellipseos minorem sive rectum axem descripto circulo E a d b E (*Fig. 134.*) inscriptum concipiamus e. g. hexagonum regulare, & ellipsin altero lateris transversi extremo E coincidentem, altero & opposito D sic elevari, dum puncto *d* in subjecto circulo perpendiculariter immineat, porroque ex omnibus angulis inscriptæ circulo figuræ perpendicula g G, *b* B &c. erecta ponantur; certum est trianguli D E *d* latera E D & E *d* à

Ed à planis FGgf &c. parallelis secari in partes proportionales, eaq; propter △△ FDG & fdg, & sic cætera quoque rectangula esse inter se, ut interceptæ linearum portiones ID & id, CI ac ci &c. in infinitum (quotcunque scil. laterum figura circulo inscripta concipiatur:) Quare etiam partes ellipseos omnes simul, ad omnes partes circuli simul (h. e. ellipsis ad circulum) erunt ut omnes portiones diametri DE ad omnes simul portiones diametri Ed vel ab vel AB, h. e. ut DE ipsa ad AB. Q.E.D.

Consect. 4.

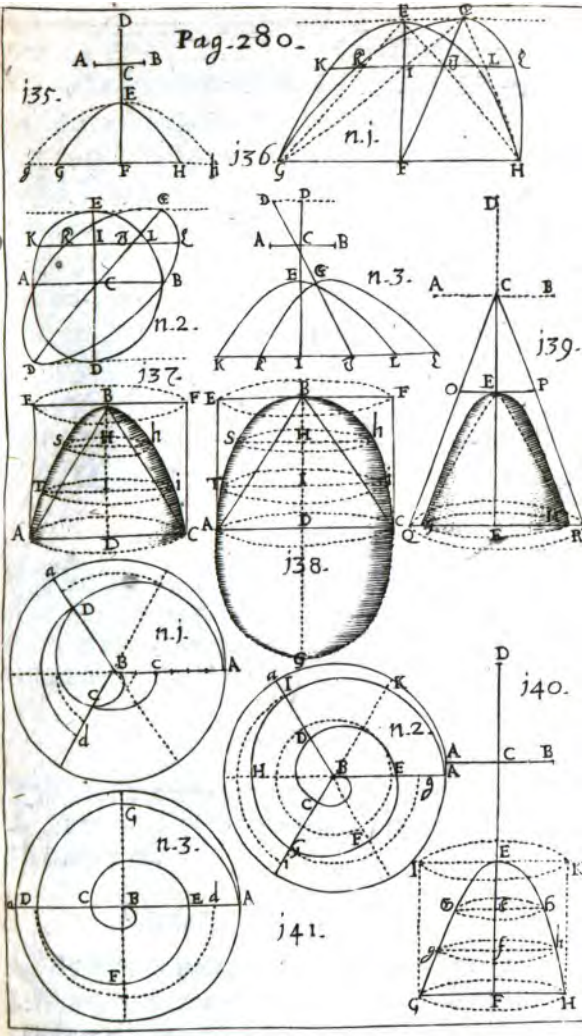
PAtet autem utramque hanc demonstrationem Proposit. præs. etiam in quibusvis ellipseos circulique segmentis eandem prorsus esse.

PROPOSITIO XII.

S*Patium Hyperbolicum quodcunq; GEHG (Fig. 135.) est ad figuram hyperbolicam æquealtam $gEhg$, [cujus latus rectum & transversum æqualia sunt* (ut in circulo) *& quidem æqualia transverso lateri prioris DE,] ut axis rectus AB ad ipsum latus transversum DE;* (prorsus ut in ellipsi.)

Demonstratio.

EX Hypothesi & Prop. VII. ejusq; Consect. 2. □ Fg est ≐ □ DFE. Quamobrem


135.
136.
n. 1.
n. 2.
n. 3.
137.
138.
139.
n. 1.
n. 2.
n. 3.
140.
141.

obrem hoc ▭ DFE h. e. quadratum Fg est ad quadratum FG ut latus transversum ad latus rectum hyperbolæ GEHG per eand. Prop. VII. h. e. (per Consect. 2. ejusd.) ut quadratum lateris transversi DE ad quadratum diam. sive axeos secundi AB: Ergo & radices horum quadratorum erunt proportionales, nimirum Fg ad FG ut DE ad AB; & consequenter (cùm idem de quibuslibet ordinatim applicatis in infinitum eodem modo verum sit) tota hyperbola gEh ad g totam GEHG, ut DE ad AB. Q.E.D.

Consect. 1.

ERgo inventâ quadraturâ hyperbolæ talis, cujus rectum & transversum latus æqualia sunt, habebitur etiam quadratura hyperbolæ cujuscunque promiscuè.

Consect. 2.

PRocedere verò demonstrationem in quibuslibet aliis hyperbolarum datarum segmentis palàm est.

PROPOSITIO XIII.

SEgmenta quævis parabolica super eadem basi, elliptica verò aut hyperbolica circa eandem diametrum secundam descripta (quorum

rum alterum rectum alterum scalenum fuerit,) *& in iisdem parallelis constituta, sunt inter se aequalia.*

Demonstratio.

I.

DE Parabolis res est manifesta; siquidem & recta GEHG, & scalena G𝔈HG (*Fig. 136. n. 1.*) (nam ad utrasque quadrat demonstratio Prop. X.) est ad △ sibi inscriptum, ut 4 ad 3. Triangula verò GEH & G𝔈H sunt aequalia, per Consect. 5. Definit. XII, aut Prop. XXVIII. Lib. I. Ergo & Parabolae.

Vel sic: In Parabola recta GEHG sint omnia ut in I. & IV. Prop. hujus Lib. nempe EI = *eb*, EF = *ib*, quadratum IK = *oecc*, quadratum FG = *oicc*. Quoniam ergo in parabola scalena quoque quadratum FG manet = *oibc*, ponatur F𝔈 = *n* & quaeratur tum abscissa 𝔈𝔍 tum respondens ipsi □ 𝔍𝔎

1. pro abscissa; ut FE ad EI sic F𝔈 ad 𝔈𝔍 per Cons. 4. Prop. 34. Lib. I.

$$ib \quad — \quad eb \quad — \quad n \quad —$$

$$\frac{en}{i}$$

2. Pro □ IK: ut FE ad EI sic □ FG

n — en — oicc.

i

ad □ IK per Prop. 4. hujus.

F. oecc.

Ergo □ IK = □ IK & IK = IK, & hoc in quovis casu in infinitum: Ergo Parabola Parabolæ. Q. E. D.

II. De Ellipsibus & Hyperbolis eodem ferè modo res patet. Positis enim in Ellipsi & Hyperbola recta (n. 2. & 3. Fig. 136.) omnibus ut in Prop. II. III. V. VII. nempe quadratum IK oecd — eecd in Ellipsi; oecd + eecd in Hyperbola, quadrat. AB oocd, per Conf. 2. Prop. VII. EI = eb, DE = bb, &c. si in obliquis prolatum transverso DE ponatur n, quæraturque latus rectum & abscissa EI, poterit his mediantibus etiam haberi quadratum IK per Prop. II. ac III.

1. Pro Latere Recto

ut n ad √oocd sic √oocd ad oocd, per

n

Conf. 2. VII.

2. Pro EI abscissa

ut ob ad eb, sic n ad en = EI

o

3. Pro

3. *Pro Latere RS* □ *deficientis vel exced. ex Prop. II. & III.*

ut $\frac{n}{}$ ad $\frac{oocd}{n}$ sic $\frac{en}{o}$ ad $\frac{ocde}{n}$ = RS.

Jam abscissa multipl. in Lat. R	Abscissa multipl. in RS
$\frac{en}{o}$ in $\frac{oocd}{n}$	$\frac{en}{o}$ in $\frac{ocde}{n}$
dat □ *oecd*.	dat □ *eecd*.
Suma horum □□, *oecd* † *eecd* in hyperb. = □ ℑ℞ per Propos. II. evidenter = □ IK.	Differentia horum □□, *oecd* — *eecd* dat in ellipsi □ ℑ℞ per Prop. III. evidenter = □ IK.

Quamobrem & lineæ ℑ℞ & IK, & totæ ℞ℒ & KL, æquales erunt; &, cùm idem de omnibus aliis hujusmodi lineis eodem modo in infinitum constet, ipsa quoque segmenta elliptica vel hyperbolica. Q. E. D.

CAPUT III.

De Conoïdibus & Sphæroidibus.

PRO-

Propositio XIV.

Conoïdes Parabolicum (a) *est subduplum cylindri, & sesquialterum coni, eandem basin altitudinemq; habentium.*

Demonstratio.

Quoniam in parabola quadratum AD (*Fig. 137.*) est ad quadratum SH, ut BD ad BH h. e. ut 3 ad 1, & sic ad quadratum TI ut BD ad BI, h. e. ut 3 ad 2, *per Prop. 4. hujus;* evidens est, hæc quadrata SH, TI, AD, & consequenter eorum etiam S*h*, T*i*, AC, hisque respondentes circulos esse in progressione arithmetica, 1, 2, 3; pariterque, si novæ bisectiones accedant in infinitum, ut abscissas, ita quadrata & circulos ordinatarum, vi cit. Prop. IV. semper futuros in progressione arithmetica, 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c. Palàm est infinitam seriem circulorum in Conoïde, tanquam hujus indivisibilium, ad seriem totidem circulorum maximo AC æqualium, h. e. ipsum Conoïdes ad Cylindrum AF esse ut 1 ad 2, sive ut 1½ ad 3, *per Consect. 9. Proposit. XXI. vel Consect. 4. Proposit. XVI. Lib. I.* sed ad eundem Cylindrum AF est Conus inscriptus ABC ut 1 ad

(a) Archim. Prop. 23. & 24. (al. 26. & 27.)

1 ad 3, per Proposit. 38. Lib. I. Ergo Cylindrus, Conoïdes, & Conus sunt ut 3, $1\frac{1}{2}$ & 1. Q. E. D.

Propositio XV.

Sphæroïdis (a) cujusq; dimidium, aut aliud quodcunq; segmentum est subsesquialterum cylindri, ac duplum coni, eandem basin altitudinemq; habentium.

Demonstratio.

Divisâ altitudine BD (*Fig.* 138.) v. g. in 3 partes æquales, quoniam in ellipsi æquè ac in circulo quadratum AD est ad quadratum SH ut ▭ GDB, ad ▭ GHB, h. e. ut 9 ad 5, & sic ad quadratum TI ut 9 ad 8, per Consect. 1. Prop. V. hujus; pariterque, si novæ bisectiones accedant, quadrata (& consequenter etiam circuli) ordinatim applicatarum progrediuntur secundùm decrementa numerorum imparium, ut 36, 35, 32, 27, 20, 11, & sic in infinitum, continuatis porrò bisectionibus; prorsus ut in Sphæra & Cylindro circumscripto Prop. 39. Lib. I. ostensum est: necessum utique est, hîc etiam (*vi Consect. 12. Prop. XXI.*) Cylindrum totum esse ad Sphæroidis inscriptum segmentum, ut 3 ad 2; & cùm

(a) Archim. 29. & 30. (al. 32. & 33.)

& cùm idem Cylindrus sit ad Conum ABC, ut 3 ad 1, etiam Sphæroidis segmentum esse ad Conum ut 2 ad 1. Q. E. D.

Propositio XVI.

Conoïdes Hyperbolicum (a) est ad Conum ejusdem baseos & altitudinis, ut aggregatum ex axe hyperbolæ genitricis & sesquilatere transverso, ad aggregatum ex eodem axe & latere transverso.

Demonstratio ipsam proportionis hujus inventionem unà complexa.

Ponatur interim (*in Fig. 139.*) CE = *a*, EF = *b*, OE = *c*; erit CF = $a + b$. Cùm igitur sit,

ut CE ad OE sic CF ad FQ,

$$a \;—\; c \;—\; a+b \;—\; \frac{ac+bc}{a}$$

erit □ EO = cc & □ FQ = $\frac{aacc+2abcc+bbcc}{aa}$.

Sicut autem hæc quadrata, sic habent etiam circuli linearum EO & FQ ad se invicem, *per Prop. XXXII. Lib. I.* adeoq; Conus COP erit ut $\frac{acc}{3}$ & Conus GQR

ut

(a) Archim. Prop. 27. & 28. (al. 30. & 31.)

ut $\frac{acc}{3} + \frac{bcc + bbcc}{a} + \frac{b^3cc}{3aa}$ (multiplicando scil. partem tertiam altitudinis CF in basin FQ:) subtracto igitur Cono COP ex Cono CQR, restabit Curticonus QOPR $bcc + \frac{bbcc}{a} + \frac{b^3cc}{3aa}$ & ex hoc Curticono solido ulterius subtracto Curticono cavo, quem spatium EGRP in genesi Conoïdis produxit (quique juxta Consect. 2. Definit. II. est ut bcc) supererit Conoides hyperbolicum $\frac{bbcc}{a} + \frac{b^3cc}{3aa}$ h.e. (substituendo nunc valores axeos vel abscissæ EF, dimid. lateris transversi EC, & diametri secundæ OP &c. in demonstrationibus cap. præced. inventos, nimirum $\frac{ob}{2}$ pro a, eb pro b, & $\sqrt{oocd}$ pro c sive $oocd$ pro cc) Conoides hyperbolicum prodibit $\frac{2eebocd}{3} + 4e^3bcd$ h.e. $\frac{6eebocd + 4e^3bcd}{3}$. Sed Conus GEH (ductâ tertiâ parte EF in □ GH, h.e. $\frac{1}{3}eb$ in $4oecd + 4eecd$) est ut $\frac{4eebocd + 4e^3bcd}{3}$. Ergo Conoides est ad Conum ut $6eebocd + 4e^3bcd$ ad

ad $4eebocd + 4e^3bcd$, h. e. (utrinque dividendo per $4eecd$) ut $1\frac{1}{2}ob + eb$ ad $ob + eb$. Quod erat inveniendum ac demonstrandum.

Scholion.

QUod si quis malit per indivisibilia, ut in præcedentibus, hanc eandem rem expedire, diviso axe EF (*Fig. 140.*) iterum in 3 partes æquales, & assumendo valores linearum in hyperbola determinatos, eb scil. pro abscissa EF, ob pro axe transverso, $\frac{ocd}{b}$ pro latere recto, $oecd + eecd$ pro quadrato semiordinatæ FG &c. erit infimus & maximus circulus diametri HG ut $oecd + eecd$, &, si fiat,

ut Latus transversum ad Latus rectum sic □ DfE
ob — $\frac{ocd}{b}$

ex $ob + \frac{2}{3}eb$ in $\frac{2}{3}eb$ (h. e. $\frac{2}{3}oebb + \frac{4}{9}eebb$) ad quartum; proveniet $\frac{2}{3}oecd + \frac{4}{9}eecd$ pro circulo secundo diametri hg; eademque illatione (ut ob ad $\frac{ocd}{b}$ sic $ob + \frac{1}{3}eb$ in $\frac{1}{3}eb$ ad quartum) pro tertio circulo diametri $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{G}$ $\frac{1}{3}oecd + \frac{1}{9}eecd$; itaut hæc indivisibilia [pro quibus hîc & in superioribus etiam cylindri partiales circumscripti assumi possent] progrediantur duplici numerorum serie; priore in progressione arithmetica simplici, 3, 2, 1, posteriore in progressione arithmetica duplicata quadratorum 9, 4, 1; idemque, si novæ bise-

ctiones accedant, in infinitum necessariò contingat, (futuris e.g. in bisectione prima numeris prioribus $\frac{6}{6}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{1}{6}$ *o e c d* posterioribus $\frac{36}{36}$ $\frac{25}{36}$ $\frac{16}{36}$ $\frac{9}{36}$ $\frac{4}{36}$ $\frac{1}{36}$ *e e c d* &c.) manifestum est ex Consectariis Prop. 21. Lib. I. Cylindrum totum HK similiter expressum duplici serie portionum respondentium, numero quidem indivisibilibus Conoidis ex bisectione quavis provenientibus, magnitudine verò omnium maximæ illarum, Summâ suarum portionum priorum ad Summam priorum in Conoide utrobique infinitarum, esse ut 2 ad 1 sive ut 3 ad $1\frac{1}{2}$ *o e c d*, *per Consect. 9. cit. Prop. XXI*; & Summâ suarum posteriorum ad Summam posteriorum in Conoide esse ut 3 ad 1 *e e c d* adeoque totum cylindrum ad ipsum Conoides ut 3 *o e c d* † 3 *e e c d* ad $1\frac{1}{2}$ *o e c d* † *e e c d*, h.e. (dividendo per *e c d*) ut 3 *o* † 3 *e* ad $1\frac{1}{2}$ *o* † *e*; h.e. (multiplicando utrinque per *b*) ut 3 *o b* † 3 *e b* ad $1\frac{1}{2}$ *o b* † *e b*; Consequenter Conum (qui est $\frac{1}{3}$ cylindri) ad Conoides, ut *o b* † *e b* ad $1\frac{1}{2}$ *o b* † *e b*. Q.E.D.

Consectarium.

PAtet igitur insimul ex hac deductione proportio Conoidis hyperbolici ad cylindrum ejusdem baseos & altitudinis, quam in propositione non expressimus; scil. ut aggregatum ex axe & sesquilatere transverso, ad triplum aggregati ex eodem axe & latere transverso.

CA-

CAPUT IV.

De Lineis ac Spatiis Spiralibus.

PROPOSITIO XVII.

Spatium Spirale (a) primum, est subtriplum circuli primi, h. e. ut 1 ad 3.

Demonstratio.

Diviso circuli ambitu (*in Fig. 141. n. 1.*) primum in 3 partes æquales, per lineas ex initiali puncto ductas, initio facto à linea prima BA, erit linea BC ut 1, BD ut 2, BA ut 3, per Consect. 1. Definit. XII. hujus, & consequenter Sectores Spirali circumscripti erunt CB*c* ut 1, DB*d* ut 4, AB*a* ut 9, per Prop. XXXII. Lib. I. Similiterque, si novæ bisectiones accedant, lineæ ex puncto B ad Spiralem eductæ erunt 1, 2, 3, 4, 5, 6; Sectores autem circumscripti, 1, 4, 9, 16, 25, 36; & sic in infinitum Sectores partiales circumscripti progredientur ordine quadratorum, totidem semper existentibus in circulo Sectoribus maximo illorum æqualibus. Ergo

T 2 omnes

(a) Archim. Prop. 24. de Spiral.

omnes Sectores Spatio Spirali in infinitum circumscriptibiles, h. e. ipsum Spatium Spirale (in quod tandem desinunt) ad totidem maximo æquales, h. e. ad circulum, est ut 1 ad 3, per Consect. 10. Prop. XXI. Lib. I. Q. E. D.

Consect. 1.

Cum circulus primus ad secundum, sit ut 1 ad 4, (h. e. ut 3 ad 12) per Def. 12. hujus, & Prop. 32. Lib. I. Spirale Spatium primum autem ad circulum primum ut 1 ad 3, *per præsens*; erit idem Spirale Spatium primum ad circulum secundum, ut 1 ad 12; & ad tertium, illatione simili, ut 1 ad 27, ad quartum ut 1 ad 48 &c.

Consect. 2.

Linea Spiralis prima est æqualis semicircumferentiæ primi circuli. Lineæ enim sive radii Sectorum, & consequenter etiam eorundem peripheriæ sive arcûs progrediuntur in ratione arithmetica simplici, ut 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c. dum interim peripheria circuli tota complectitur arcûs totidem maximo æquales. Ergo tota circuli peripheria est ad infinitam seriem arcuum circumscriptorum, h. e. ad ipsam lineam Spiralem, ut 2 ad 1, per Consf. 9. Prop. XXI. Lib. I.

PRO-

Propositio XVIII.

Totum (a) Spatium Spirale lineâ rectâ secundâ EA & Spirali secunda EGIA comprehensum (Vid. Fig. 141. n. 2.) est ad circulum secundum ut 7 ad 12.

Demonstratio.

Diviso namque circuli ambitu primùm in tres partes æquales, ad Spiralem secundam eductæ erunt quatuor rectæ, BE, BG, BI & BA, habentes se ut 3, 4, 5, 6, Sectores autem circumscripti non nisi tres, nempe GB*g*, IB*i* & AB*a*, qui progrediuntur secundùm quadrata linearum trium posteriorum, nimirum 16, 25, 36, ut Summa sit 77, dum Summa trium maximo æqualium est 108, adeoque hæc ad illam (dividendo utrinque per 9) ut 12 ad $8\frac{5}{9}$. Bisectis porrò arcubus & partibus lineæ BE, ut hæc sit 6, erit secunda BF 7, & sic reliquæ quinque 8, 9, 10, 11, 12; Sectores autem ipsis (exceptâ primâ) respondentes, 49, 64, 81, 100, 121, 144, ut Summa ipsorum sit 559, dum Summa sex æqualium maximo, h.e. totus circulus, est 864, adeoque hæc ad illam (utrinque dividendo per 72) ut 12 ad $7\frac{55}{72}$. In altera bisectione ar-

(a) Archim, Prop. 25.

arcuum partiumque lineæ BE, ut hæc sit 12, secunda 13 &c. usque ad decimam tertiam BA, quæ erit 24, Summa Sectorum duodecim invenietur 4250; Summa verò totidem æqualium maximo 6912, adeoque hæc ad illam, (utrinque dividendo per 576) ut 12 ad $7\frac{218}{576}$ s. $\frac{109}{288}$. Proportio igitur in

I. Casu 12 ad $7 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$ s. $\frac{4}{72}$

II. Casu 12 ad $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{72}$ s. $\frac{4}{288}$

III. Casu 12 ad $7 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{288}$ &c.

decrescentibus ita primis & secundis fractionibus adhærentibus per sui dimidia, postremis per partes quartas. Quare proportio circuli secundi ad spatium Spirale secundum est ut 12 ad

$$\begin{array}{llll} 7 & + 1 & + \frac{1}{2} & + \frac{1}{18} \\ & - \frac{1}{2} & - \frac{1}{4} & - \frac{1}{72} \\ & - \frac{1}{4}\ \&c. & - \frac{1}{8}\ \&c. & - \frac{1}{288}\ \&c. \\ & = 0 & = 0 & \end{array}$$

Vi Consect. 3. & 8. Prop. XXI. Lib. I.

h. e. ut 12 ad 7. Q. E. D.

Consect. 1.

Quia circulus secundus ad Spatium Spirale primum est ut 12 ad 1, *per Consect.* 1. *Prop. praeced.* ad Spatium Spirale secundum autem ut 12 ad 7, *per praes.* erit ad Spatium secundum sine primo (nempe BCDEAIGE) ut 12 ad 6, h. e. ut 2 ad 1.

Consect. 2.

ERgo Spatium secundum separatim ad primum ut 6 ad 1.

Consect. 3.

Cùm hic in trisectione utriusque circuli, tam primi quàm secundi, oriantur sex lineæ, totidemque Sectores, nempe tres lineæ BC, BD, BE, h. e. 1, 2, 3, quibus tres arcûs eadem progressione intra primum circulum, totidemque hujus maximo æquales, respondent; porròque tres aliæ lineæ BG, BI, BA, h. e. 4, 5, 6, quibus tres arcûs eadem progressione intra circulum secundum, pariterque totidem maximo æquales, respondent; ideò Summa inæqualium arcuum omnium erit 21, Summa verò ex utroque circulo æqualium (qui in primo singuli 3, in secundo 6 æquivalent) 27. Quare Summa utriusque peripheriæ ad Summam omnium arcuum circumscriptorum erit ut 27 ad 21 h. e. (utrinque dividendo per 9) ut 3 ad 2⅓. Bisectis porrò arcubus circulorum & partibus lineæ BA, orientur arcûs circumscripti inæquales sex intra primum circulum, qui sunt ut 1, 2, 3, 4, 5, 6, totidemque intra secundum, 7, 8, 9, 10, 11, 12; quorum omnium Summa est 78, dum Summa totidem æqualium utrobique est 108. Quare hæc ad illam, h. e. Summa utriusque peripheriæ ad arcûs circumscriptos duodecim simul sumptos, nunc est ut 108 ad 78, h. e. (utro-

bique dividendo per 36) ut 3 ad $2\frac{1}{3}$. Sic novâ bisectione succedente reperietur proportio ut 3 ad $2\frac{1}{12}$ &c. & hinc tandem evidentissimè inferetur: Summam utriusque peripheriæ se habere ad Summam omnium arcuum in infinitum circumscriptibilium, h. e. ad ipsam totam helicem ut 3 ad $2 + \frac{1}{3}$

$$- \frac{1}{6}$$
$$- \frac{1}{12} \text{ \&c.} = 0. \text{ h. e. ut } 3 \text{ ad } 2.$$

Q. E. D.

Consect. 4.

Ergo, cùm circuli secundi peripheria, sit primæ dupla, illa sola erit Spirali toti æqualis.

Consect. 5.

Ergo, si peripheria secundi circuli sit 2, erit peripheria primi 1 & linea Spiralis prima $\frac{1}{2}$ per Consect. 2. Prop. anteced. Quare Spiralis secunda sola erit $1\frac{1}{2}$, adeoque peripheria secundi sola ad Spiralem secundam solam ut 2 ad $1\frac{1}{2}$ h. e. ut 4 ad 3; & ad primam solam ut 4 ad 1.

Scholion I.

Sicut autem Consectarium 4 etiam alio modo deduci potest, comparando scil. arcûs circuli secundi solos cum circumscriptis respondentibus, sed bis sumptos (quia circulus ille bis decurritur, dum helix tota describitur) ac inveniendo in prima trisectione proportionem peripheriæ secundæ duplæ ad omnes

omnes circumscriptas ut 12 ad 7; in bisectione succedente ut 12 ad $6\frac{1}{2}$; in secunda bisectione ut 12 ad $6\frac{1}{4}$ &c. tandemque inferendo, peripheriam secundam duplam esse ad omnes arcûs helici toti in infinitum circumscriptibiles, h. e. ad ipsam helicem, ut 12 ad $6 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ &c. $= 0$, h. e. ut 12 ad 6; & consequenter simplam peripheriam secundam esse ad totam helicem ut 6 ad 6: Ita Consect. 5. etiam separatim eodem modo habebitur, si loco trisectionis primæ, bisectio tantùm adhibeatur. (*Vid. Fig. 141. n. 3.*) Sic enim in bisectione prima arcûs circumscripti lineæ Spirali secundæ separatim essent duo semicirculi D*d*, 3 & A*a*, 4, (ut enim linea BC est 1, BE, 2, BD, 3, BA, 4; sic arcus radio BD descriptus est 3 & descriptus radio BA $= 4$,) Summa 7; dum Summa duorum maximo æqualium est 8. In secunda bisectione (cùm BE sit 4) BF & ejus arcus sit 5, arcûs BD 6, arcûs BG 7, arcus BA 8, Summa 26; dum Summa totidem quadrantum maximo æqualium est 32. Sic in tertia bisectione Summa octo octantum circumscriptorum secundæ helici invenietur 100, Summa totidem maximo æqualium est 128 &c. Quamobrem circuli secundi peripheria in primo casu erit ad Summam arcuum helici secundæ circumscriptorum, ut 4 ad $3 + \frac{1}{2}$; in secundo ut 4 ad $3 + \frac{1}{4}$; in tertio ut 4 ad $3 + \frac{1}{8}$ &c. adeoque ad omnes arcûs in infinitum circumscriptibiles, h. e. ad ipsam helicem secundam, ut 4 ad $3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ &c. $= 0$. h. e. ut 4 ad 3. Q. E. D.

Eadem methodo facilè reperietur proportio tertii circuli ad Spatium Spirale tertium, & peripheriæ illius ad Spiralem vel totam, vel tertiam separatim; prout tentanti palàm erit.

I. Pro Spirali Spatio tertio.

(*Fig. 142.*)

BC	1	BF	4	BI	7	49
BD	2	BG	5	BK	8	64
BE	3	BH	6	BA	9	81

sunt tres Sectores primi circumscripti portionibus helicis tertiæ. Horum trium Sectorum Summa est 194; Summa verò totidem maximo æqualium 243. Ergo prima proportio hujus Summæ ad illam ut 243 ad 194 h. e. (utrobiq; dividendo per 9) ut 27 ad $21\frac{1}{9}$.

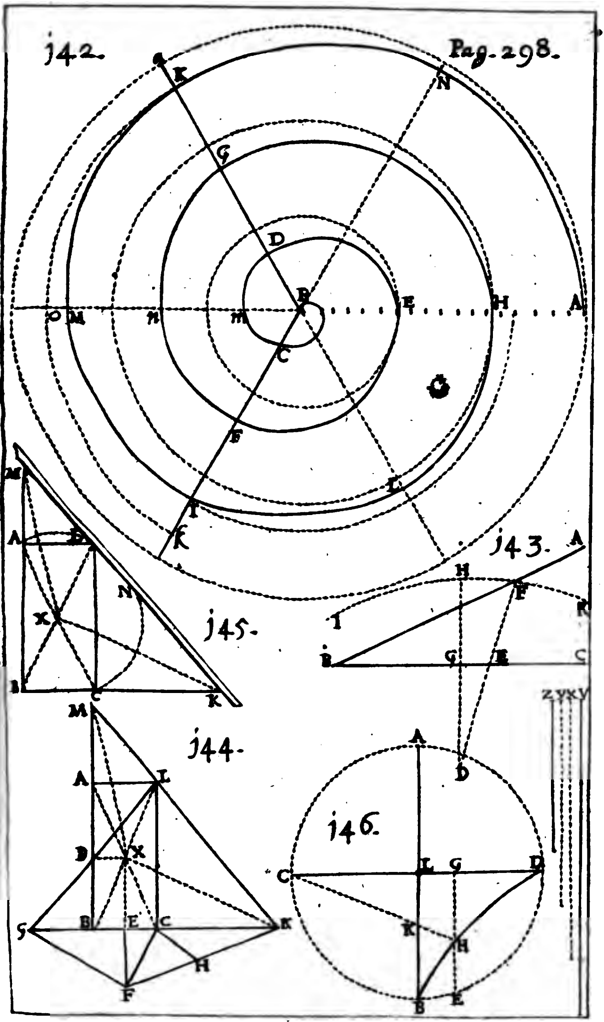
In bisectione prima lineæ erunt 7:

BH 12,	BL	13	169
	BI	14	196
	BM	15	225
	BK	16	256
	BN	17	289
	BA	18	324
	Summa		1459

Sectores portionibus helicis tertiæ circumscripti

Summa 1459; dum interim Summa totidem æqualium maximo est, 944, adeoque secunda proportio ut 1944 ad 1459 h. e. (utrobique dividendo per 72) ut 27 ad $20\frac{19}{72}$.

In bisectione secunda lineæ erunt 13, nempe BH 24, cæteræ 25, 26 &c. Sectorum autem h. e. numerorum quadratorum 12 posterioribus respondentium Summa invenietur 11306; dum interim Summa totidem maximo æqualium futura est 15552,



142.
Pag. 298.
143.
144.
145.
146.

15552, ita ut habeatur tertia proportio hujus Summæ ad illam, ſcil. ut 15552 ad 11306 h. e. (utrobiq; dividendo per 576) ut 27 ad $19\frac{362}{576}$.

Ergo I. Proport. ut 27 ad 19 † 2 † $\frac{5}{8}$ h. e.
(ad 19 † 2 † $\frac{1}{2}$ † $\frac{1}{18}$
II. — ut 27 ad 19 † 1 † $\frac{19}{72}$ h. e.
(ad 19 † 1 † $\frac{1}{4}$ † $\frac{1}{72}$
III. — ut 27 ad 19 † $\frac{362}{576}$ — h. e.
(ad 19 † $\frac{1}{2}$ † $\frac{1}{8}$ † $\frac{1}{288}$.

Ergo Proportio Circuli tertii ad Spatium Spirale tertium
ut 27 ad 19 † 2 † $\frac{1}{2}$ † $\frac{1}{18}$
— 1 — $\frac{1}{4}$ — $\frac{3}{72}$ h. e. ut 27 ad
— $\frac{1}{2}$ &c. — $\frac{1}{8}$ &c. — $\frac{3}{288}$ &c. 19. Q. E. D.
≅ 0. ≅ 0. ≅ 0.

II. Pro Linea Spirali tertia.

Si primæ triſectionis loco (ut minùs commodæ ad obtinendum ſcopum) hîc etiam, uti ſuprà, biſectio ſupponatur adhibita in eadem figura, lineæ à puncto B ad helicem excurrent ſex ſc. B*m*, 1, BE, 2, B*n*, 3; BH, 4, B*o*, 5, BA, 6; quibus reſpondent totidem arcûs ſemicirculares eâdem progreſſione, binarum autem maximis 2, 4, 6 æquales totidem; ita ut Summa inæqualium ſit 21, æqualium verò 24, adeoque proportio trium peripheriarum ſimul ad omnes circumſcriptas ſimul, ut 24 ad 21 h. e. (utrobique dividendo per 6) ut 4 ad $3\frac{1}{2}$. In ſecunda biſectione lineæ & arcûs inæquales 12 facient Summam 78, quaternorum autem maximis æquales totidem dabunt Summam 96; ut Proportio ſecunda ſit 96 ad 78 h. e. (utro-

trobique dividendo per 24) 4 ad $3\frac{1}{4}$. In tertia bisectione prodibit proportio ut 384 ad 300 h. e. (utrobique dividendo per 96) ut 4 ad $3\frac{1}{8}$ &c. Ergo Proportio trium circulorum simul ad helicem totam est

$$\text{ut } 4 \text{ ad } 3 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} \text{ \&c.} = 0.$$

h. e. ut 4 ad 3 sive ut 12 ad 9. Q. E. D.

Consect. 6.

JAm, si primi circuli peripheria ponatur 2, secunda erit 4, tertia 6, Summa consequenter 12; manifestum est peripheriam tertiam separatim esse ad helicem totam, ut 6 ad 9 h. e. ut 2 ad 3.

Consect. 7.

ET quia peripheria secunda (quæ est 4) æqualis est helici primæ & secundæ simul, per Consect. 4. proximè superiùs; erit residua Spiralis tertia 5, adeoq; tertiæ peripheriæ proportio ad ipsam ut 6 ad 5.

Consect. 8.

COnsistunt ergo proportiones singularum peripheriarum ad suas Spirales correspondentes, in progressione numerorum ordinalium, ita sc. ut binorum quorumlibet, posterior peripheriam circuli, prior inscriptam Spiralem designet, & consequenter lineæ Spirales progre-

grediantur arithmeticè per numeros impares, circulorum peripheriæ per pares.

1 — — Spiralis prima
2 — — Peripheria prima
3 — — Spiralis secunda
4 — — Peripheria secunda
5 — — Spiralis tertia
6 &c. — Peripheria tertia &c.

Scholion II.

DEduceretur autem Consect. 7. etiam separatim facillimè h. m: In prima bisectione linea BA ejusque periph. est 6, linea B*o* ejusque periph. 5, Summa circumscriptarum peripheriarum 11; Summa totidem maximè æqualium 12. Ergo circuli tertii peripheria ad duas circumscriptas ut 12 ad 11 h. e. ut 6 ad $5\frac{1}{2}$. In secunda bisectione quatuor quadrantes circumscripti erunt 12, 11, 10, 9, Summa 42; Summa verò quatuor æqualium maximo, h. e. peripheria circuli tertii 48. Ergo proportio nunc ut 48 ad 42 h. e. utrinque dividendo per 8) ut 6 ad $5\frac{1}{4}$. Sic tertia proportio habebitur ut 192 ad 164, h. e. (utrobique dividendo per 32) ut 6 ad $5\frac{1}{8}$. Quare proportio peripheriæ tertiæ ad helicem tertiam est

$$\text{ut } 6 \text{ ad } 5 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} \;\&c. = 0. \text{ h.e. ut } 6 \text{ ad } 5.$$

Q.E.D.

Consect. 9.

QUemadmodum autem Consect. 8. suppeditat regulam determinandi proportionem heli-

helicis cujuslibet ex quovis ordine, ad respondentis circuli peripheriam; si nimirum numerus ordinis duplicetur pro circuli peripheria, & impar antecedens-proximè sumatur pro linea Spirali: Sic hactenus demonstrata regulam aliam quoque suppeditant, proportionem Spatii Spiralis in quolibet ordine ad suum circulum definiendi. Cùm enim circuli progrediantur secundùm numeros quadratos, 1, 4, 9, 16 &c. Sit autem primus circulus ad spatium primum ut 3 ad 1 (h. e. ut 1 ad $\frac{1}{3}$) per Prop. XVII; secundus ad secundum ut 12 ad 7 (h. e. ut 4 ad $2\frac{1}{3}$) per Prop. XVIII. tertius ad tertium ut 27 ad 19 (h. e. ut 9 ad $6\frac{1}{3}$) per Schol. I. hujus; contemplati utramq; hanc seriem juxta se positam,

Circulorum,	1,	4,	9
Spatiorum	$\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$	$6\frac{1}{3}$

Videmus numeros spatiorum prodire, si ex quadratis numeris circulorum subtrahantur ipsorum radices, & residuo addatur $\frac{1}{3}$. Quamobrem, si v. g. determinanda nobis esset proportio quarti circuli ad quartum Spatium Spirale; quadratum ex 4 nempe 16 daret circulum; hinc subtractâ radice 4, restarent 12 & addito $\frac{1}{3}$ haberetur Spatium Spirale quartum $12\frac{1}{3}$: Similiterque quinto circulo 25 responderet Spatium Spirale $20\frac{1}{3}$ &c. idque verum esse & indubium, patet ex eo, quòd, si numeros hosce 16 & $12\frac{1}{3}$, item 25 & $20\frac{1}{3}$ multiplicemus per 3, ut proportiones illæ habeantur in numeris integris, 48 & 37, 75 & 61, hi ipsi

sint

sint iidem illi numeri, quos Archimedes in Coroll. Prop. XXV. innuerat.

Consect. 10.

QUin hæc à nobis nunc dicta, sunt ipsissimum illud Corollarium, ipsam Prop. XXV. simul comprehendens, quòd sc. Spatium Spirale cujusvis ordinis ad respondentem circulum se habeat, ut rectangulum è semidiametris hujus ipsius ac præcedentis circuli unà cum tertia parte quadrati differentiæ inter utramque semidiametrum ad quadratum majoris semidiametri. Nam, si e. g. proportio Spatii Spiralis tertii ad circulum tertium desideretur, cùm tertii hujus circuli semidiameter sit ut 3, & secundi antecedentis ut 2, differentia adeò 1; rectangulum ex 2 in 3, i. e. 6, unà cum $\frac{1}{3}$ quadrati differentiæ definiet Spatium Spirale tertium $6\frac{1}{3}$; cùm circulus tertius definiatur per quadratum semidiametri majoris, nempe per 9, & sic in cæteris; prout inventi à nobis numeri volunt, aut porrò secundùm regulas datas inveniendi & hîc in pleniore tabella conspiciendi:

Ordi-

Ordines	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Circuli	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Spatia tota inclusis præcedentibus.	$\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$	$6\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{3}$	$20\frac{1}{3}$	$30\frac{1}{3}$	$42\frac{1}{3}$	$56\frac{1}{3}$	$72\frac{1}{3}$	$90\frac{1}{3}$
Spatia separata, exclusis præcedentibus.	$\frac{1}{3}$	2	4	6	8	10	12	14	16	18

Consect. II.

EX qua tabella (α) simul oculis ipsis obvium est, secundum quidem spatium excluso primo esse primi sextuplum , prout Consect. 2. Prop.

(α) Archim. Prop. XXVII.

Prop. XVIII. jam deduximus; tertium autem separatum esse secundi duplum, quartum ejusdem secundi triplum, quintum quadruplum, & sic deinceps.

Scholion III.

Atque hæc de Spiralibus hoc loco sufficiant, ut quæ non palmaria solùm Archimedis theoremata de Spatiis Spiralibus, sed & præcipua de lineis Spiralibus (de quibus apud Archimedem altum est silentium) comprehendunt. Si cui lubeat ultrà porrigere nostram hanc methodum, nullo quidem negotio, & quæ restant pauca apud Archimedem, & quæ *Wallisius* in Arithmetica Infinitorum à Proposit. V. ad XXXVIII. inclusivè, aliique in hoc argumento excogitârunt, eodem modo demonstrabit.

CAPUT V.

De Conchoïde, Cissoide, Cycloide, Quadratrice &c.

PROPOSITIO XIX.

Conchoides Nicomedis prima Bbb (Fig. 110.) ex utraque parte perpendicularis cDb ad Horizontalem sive directricem AE semper propiùs accedit, nec unquam tamen cum ea prorsus conveniet, licet utraq; in infinitum produci concipiatur.

Demonstratio.

Cùm enim ſola D *b* ad AE perpendicularis ſit, reliquæ verò *a b* omnes eò magis ad hanc inclinatæ, quò longiùs abſunt à media D *b*, & omnes interim tum huic tum inter ſe ſint æquales, per Def. 13; evidens eſt puncta *b* & B tantò propiùs ad AE accedere, quantò magis à media D *b* recedunt. Et quia tamen BAC & *b a c* lineæ omnes ſunt rectæ, quorum puncta A, *a*, ſunt in recta AE, æquè impoſſibile eſt punctum *b* vel B quod in Conchoïde ſemper eſt rectam hanc unquam attingere, quàm impoſſibile eſt punctum C in eadem exiſtere, vi Def. alleg. Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

Nulla tamen alia recta inter directricem AE & Conchoidem duci poteſt, quæ hanc productam non ſecet.

Demonstratio.

Quod ſi enim recta talis ponatur cum A E parallela, ut G H, fiatque, ut D I ad I C ſic D *b* ad quartam, quæ major erit quàm I C, ſicut D *b* major eſt quàm D I, & conſequenter, ſi ejus intervallo

vallo ex C ducatur arcus circularis, hic lineam GH necessariò secabit e. g. in G. Ductâ ergo C*a*G, erit ut DI ad IC sic *a*G ad GC, h. e. ad quartam illam antè inventam, vi Prop. 34. Lib. I. Sed ut DI ad IC, sic erat quoque D*b* ad eandem quartam, *per Construct.* Ergo *a*G & D*b*, quæ ad eandem habent eandem rationem, erunt æquales, & consequenter punctum G est in Conchoide, *vi Def. 13.* & consequenter recta GH producta illam productam secabit, ex una æquè ac ex altera parte, ob rationem utrobique eandem. Multò magis autem secabit, ex alterutra saltem parte, si non sit parallela directrici AE; quod communis ratio docet. Ergo nulla recta duci potest inter Conchoiden &c. Q. E. D.

Consectarium.

HInc præter alia Problemata hoc etiam solvitur facillimè, quo postulatur, dato quovis angulo rectilineo ABC (*Fig. 143.*) & puncto quodam extra illum, ex hoc per illius crura ita ducere rectam DEF ut hujus portio EF, anguli cruribus intercepta, sit æqualis lineæ datæ Z. Etenim si per crus anguli proximum BC ex dato puncto D ducatur perpendicularis DGH, fiatque GH æqualis datæ Z, & ex centro C intervallo GH describatur Conchoides IHK, quæ ab altero anguli crure BA

U 2 ne-

necessariò secatur, vi Proposit. præs. e.g. in F; ducta DF dabit portionem interceptam EF = GH per naturam Conchoidis, & consequenter = datæ Z.

Scholion.

HUjus Consectarii ope nobile illud Problèma de inveniendis duabus mediis proportionalibus solvit Nicomedes hoc modo, quem ex *Eutocio* in compendium contractum & immutato quodammodo ordine hîc damus: Datæ duæ AB & BC, (*Fig. 144.*) quas inter duæ mediæ desiderantur, jungantur ad angulos rectos, dividanturque utræque bifariam in D & E completo rectangulo ABCL, ex L per D agatur LG in prolongatam BC, ut hoc pacto GB evadat = AL vel BC: Ex E demissâ perpendiculari resecetur ex C intervallo CF = AD portio EF, ductaque FG agatur parallela CH; tandemque per crura anguli KCH ducatur recta FHK, ita ut portio HK sit æqualis lineæ CF, per Consect. præced. & ex K per L in continuatam BA, recta KM: quibus omnibus ritè peractis, erunt CK & AM duæ mediæ proportionales inter AB & BC; id quod nostro more nos ita demonstrabimus: Propter similitudinem ΔΔ MAL & LCK est

ut MA ad LC vel AB, sic AL vel BC ad CK;
b — *eb* — *c* — *ec*

& porrò

ut MA ad AD—sic GC ad CK h. e. FH ad HK
b —½*eb* —2C— *c*, propter GF & CH parallelas, per Consl. 4. Prop. XXXIV. Lib. I.

Ergo

Ergo cùm HK sit = AD = ½ *eb*, erit FH = MA = *b*, & consequenter MD = FK, utrumque scil. *b* † ½ *eb*, & quadratum utriusque = *bb* † *ebb* † ¼ *eebb*, = □ EF † EK, vi Theorem. Pythag. Quod si nunc his æqualibus addamus æqualia □□ DX & EC = ¼ *cc*; erit Summa illorum, nempe □ MD † □ DX h.e. □ MX, *bb* † *ebb* † ¼ *eebb* † ¼ *cc*, æqualis Summæ horum, nempe □ EF † □ EC, (h.e. □ CF, per Theor. Pythag. sive EX ex Construct.) † □ EK = ¼ *eebb* † ¼ *cc* † *ecc* † *eecc* = □ KX. Ex quo duo nunc consequuntur: 1. Lineas MX & KX esse æquales: 2. Si ab æqualibus istis Summis auferantur communia ¼ *eebb* † ¼ *cc*, residua esse æqualia, nimirum *bb* † *ebb* = *ecc* † *eecc*; & (cùm ablatum *bb* ad ablatum *ecc* manifestò sit ut reliquum *ebb* ad reliquum *eecc*, tota verò cum ablatis & reliquis eandem habeant rationem, per Proposit. 26. Lib. I.) separatim quoque *bb* = *ecc* & *ebb* = *eecc*. At verò ex æquatione posteriore sequitur esse,

ut *eb* ad *ec* sic *ec* ad *b*, vi Propos. 19.
AB — CK — CK — MA

Lib. I. eademque ratione ex æquatione priore sequitur, esse,

ut *ec* ad *b* sic *b* ad *c*; h.e. CK & MA
CK — MA — MA — BO

esse duas medias proportionales inter AB & BO. Q.E.D.

Ex qua deductione nunc etiam patet fundamentum illius modi mechanici, quo usus est *Heron Alexandrinus* apud *Eutocium* in Lib. II. de Sphæra & Cy-

lindro, & quem in Geometriam suam practicam transtulit B. Swenterus noster Lib. I. Tract. I. Proposit. XXIII. cùm sc. junctis in rectanguli formam & continuatis ex parte altera rectis datis AB & BC, (*Fig. 145.*) regulam in L tanquam centro mobilem tamdiu ultrò citròque movet, donec XK & XM circino mediante reperiantur æquales. Cui similis est alius *Philonis* ex eodem fonte manans, quo, facto super AC semicirculo, regula mobilis in L tamdiu huc istuc emovetur, donec LM & NK æquales deprehendantur: id quod praxi accommodatius videtur Eutocio & præstitu facilius ope regulæ in particulas minutas æquales diviso.

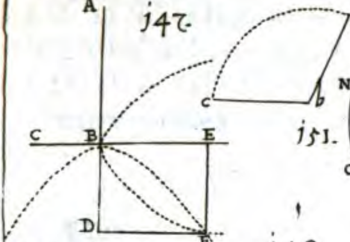
Propositio XXI.

SI per Cissoiden Dioclis ex quocunq; puncto diametri alterius in circulo genitore, v. g. ex G (Fig. 111. n. 1.) ducatur perpendicularis GE; erunt CG, GE, GD & GH continuè proportionales.

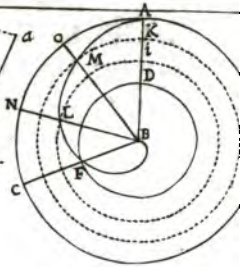
Demonstratio.

Cùm enim GE & IF, tanquam sinûs recti, nec non GD & IC, tanquam sinûs versi æqualium ex hypothesi arcuum ED & FC, sint æquales; erit ut ID ad IF (h. e. CG ad GE) sic IF ad IC (h. e. GE ad GD) per n. 3. Schol. II. Prop. 34. Lib. I. Est verò etiam GD ad GH ut

147.

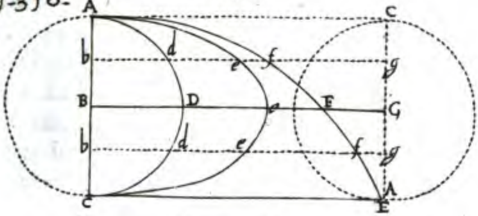


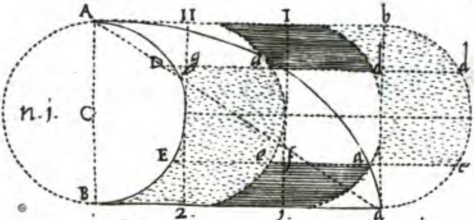
151.



Pag. 310.

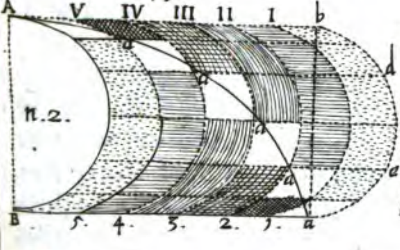
148.

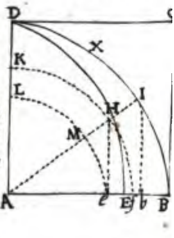




149.

150.





ID ad IF (h.e. ut GE ad GD) per cit. XXXIV, Lib. I. Ergo CG ad GE, GE ad GD, & GD ad GH habent easdem continuè rationes. Q. E. D.

Consectarium.

HInc in proclivi erat *Diocli* inter datas duas rectas V & Z (*Fig. 146.*) invenire duas medias proportionales *x* & *y*. Faciebat enim (descriptâ priùs curvâ suâ DHB) ut V ad Z, ita CL ad LK, ductâque CKH usque ad curvam, & per H perpendiculari GE, habebat inter CG & GH duas medias proportionales GE & GD, vi præs. Prop. cùm interim CG prima esset ad GH ultimam ut CL ad LK, h. e. ut V prima ad Z ultimam datam, vi Constr. Ergo nihil restabat, quàm ut faceret *primò*, ut CG ad GE sic V ad X; *deinde* porrò ut GE ad GD sic *x* ad *y*.

Scholion.

NOn incongruum fuerit hoc loco meminisse alius cujusdam modi, mediantibus duabus parabolis inveniendi duas medias inter datas quascunque duas, quo *Menechmus* olim usus est, datas nempe AB & BC (*Fig. 147.*) jungendo ad angulos rectos ac pro lubitu prolongando per B ac D; deinde verò circa BE tanquam axem, pro ratione BC tanquam lateris recti, describendo parabolam, pariterque circa BD tanquam axem, pro ratione AB tanquam lateris recti, parabolam aliam, quæ secet priorem in F: quo facto, puncto intersectionis F

applicata semiordinata FE (vel huic æqualis BD) & abscissa BE, erant duæ mediæ proportionales quæsitæ. Est enim, vi Consect. 4. Prop. 1. hujus Lib. inter AB & BD media proportionalis DF vel BE, pariterque inter BE & BC media proportionalis EF vel BD, atque adeò ut AB ad BE sic BE ad BD, & ut BE ad BD sic BD ad BC; Q.E.F.

Huic viæ Menechmi non absimilis est illa *Cartesii* quam habet Geom. p. m. 91. nisi quod unicam solùm parabolam, alterius autem loco circulum adhibeat: quem imitatus posteà *Renatus Franciscus Slusius*, ope circuli & ellipsium, vel circuli & hyperbolarum rem eandem infinitis modis conficere docuit in tractatu ingenioso *Mesolabum* inde dicto.

PROPOSITIO XXII.

Cycloidis semiordinata quævis BF (Fig. 148.) vel bf, adæquat Sinum, in circulo genitore respondentem, BD vel bd, unà cum arcu Sinûs illius AD vel Ad.

Demonstratio.

Motus enim puncti A semicycloidem AFE v. g. describentis, vi Defin. XI. compositus est ex motu orbis circa centrum B per semicirculum ADC, & ex motu centri recto per lineam rectam BG æqualem CE, ipsique adeò semicirculo vel orbis motui. Quemadmodum igitur, delatum

latum punctum A usque ad E interim motu orbis à diametro AC discessit per totum semicirculum ADC, h.e. ad AC penitus iterum accessit, motu centri verò totum spatium BG vel CE decurrit, quod adeò arcui semicirculari soli æquatur; ita idem A, cùm pervenisset ad F usque, motu orbis decurrit quadrantem AD à diametro AC discedens quantitate Sinûs BD, motu centri verò insuper (qui æqualis est motui orbis) recedit ab AC spatio DF: atque adeò semiordinata BF æqualis est arcui AD hujusque Sinui BD simul sumptis; eodemque modo semiordinata *bf* arcui A*d* ejusque Sinui *bd* &c. Q.E.D.

Consect. 1.

NUllo negotio igitur vel integræ peripheriæ circuli, vel semiperipheriæ vel arcui cuivis dato AD vel A*d* recta æqualis ope Cycloidis exhibetur; scil. CE dupla pro integra circumferentia simpla pro semiperipheria, DF pro quadrante A*d*, *bf* pro arcu A*d* &c.

Consect. 2.

QUadratura igitur circuli geometricè obtinebitur, juxta Consect. 2. Definit. XV. Lib. I.

Consect. 3.

QUod si Sinuum BD, *bd*, duplæ sumantur Be, *be* &c. ita ut omnia indivisibilia *bd* simul ad omnia indivisibilia *be* simul sint ut BD ad B*e*, curva per puncta *e* descripta erit ellipsis, *per Prop. XI.* & spatium curvilineum ADC*e*A = semicirculo ACDA.

Consect. 4.

ET cùm DF (h. e. D*e* + *e*F) sit æquale quadranti DA, vi Prop. præs. erit BD + FG etiam æquale quadranti (quia tota BG vel CE = semicirculo) & consequenter *e*F & FG æquales; similiterque cùm *df* suprà & infrà sit æquale arcui *d*A erit infrà *bd* + *fg* = reliquo arcui *d*C: Supernè autem *bd* + *ef* (h. e. *df*) = arcui æquali *d*A. Ergo *ef* supernè & *fg* infernè sunt æquales, & (cùm idem eodem modo de singulis ejusmodi indivisibilibus ostendatur) trilineum FGE = trilineo *e*FA.

PROPOSITIO XXIII.

SPatium cycloidale triplum est circuli genitoris, h. e. semicycloidale AECA triplum semicirculi ADCA.

Demonstratio.

CÙm enim parallelogrammum BCEG sit æquale circulo integro, *per Consect. 2. Defin.*

Defin. XV. Lib. I. h. e. semiellipsi A*e*CA, *vi Constr. præs.* erit trapezium C*e*GE = ellipseos quadranti sive semicirculo. Sed trilineum FEG est = trilineo FA*e*, per Consect. 4. præced. Ergo etiam trilineum A*e*CEA æquatur semicirculo. Totum igitur spatium cycloidale tribus semicirculis. Q. E. D.

Vel sic.

Cùm totum Parallelogrammum AE sit æquale duobus circulis, & semiellipsis A*e*CA uni; reliquum spatium A*e*CEC pariter adæquabit circulum, ejusque dimidium A*e*GC semicirculum. Sed trilineum A*e*F æquatur trilineo FGE, per Consect. 4. præced. Ergo, hoc in illius locum substituto, trilineum AFEC æquabit semicirculum: Ergo residuum Parallelogrammi, h. e. spatium cycloidale AFECA æquabitur tribus semicirculis. Q. E. D.

Scholion.

Brevioribus hisce demonstrationibus, quæ nativitatem suam *Honorati Fabri* cogitatis maximam partem se debere non dissimulant., adjungemus aliam quoque prolixiorem licet, haut injucundam tamen, quam à *Carolo Renaldino* Lib. I. de Resol. & Comp. Math. p. 299. acceptam evidentiorem hîc damus ac dubiis omnibus liberatam, quodammodo er-

do er-

do etiam faciliorem. Absolvetur autem his illationibus: 1. Parallelogrammum rectilineum A*b* *a*B (*Fig. 149. n. 1.*) æquale esse curvilineo A*bda* BDA: 2. Ut illud per diagonalem rectam A*a*, sic hoc per semicycloiden A*aa*, in duas partes æquales dividi, ita ut triangulum rectilineum A*a*B æquale sit curvilineo A*aa* BDA: 3. Hoc ergo æquè ac illud æquari circulo genitori; & consequenter 4. Si huic curvilineo addatur semicirculus ADBA, spatium semicycloidale A*aa* BA æquari tribus semicirculis. Primum est evidens, siquidem ex parallelogrammo rectilineo dum aufertur semicirculus ADBA, ex una parte, & additur ex altera semicirculus *abda*, oritur parallelogrammum curvilineum. Tertium constat ex Consect. 2. Definit. XV. Lib. I. quia linea B*a* æquatur semiperipheriæ, quæ multiplicata in semidiametrum BC dat aream circuli. Quartum per se patet; atque adeò demonstrandum unicè restat secundùm, quòd parallelogrammum curvilineum à cycloide in duas partes æquales dividatur, h. e. trilineum exterius A*adb*A interiori A*aa*BDA æquale esse; Id quod hoc modo ostendimus: Divisâ basi B*a* in tres partes æquales, & per has ductis semicirculis, porròque transversis rectis D*d*, E*e*, per intersectiones semicirculorum & cycloidis; certum est ex ipsa hujus genesi, vi Consect. Definit. XI, sicut recta *a*I est pars tertia totius *a*B, sic arcum I*a* esse partem tertiam peripheriæ genitricis, eademque ratione arcum 2*a* ⅔tias, & sic reliquum arcum *a*II iterum ⅓; ut hoc pacto primus arcus I*a* & ultimus *a*II, eorumque adeò & Sinûs recti *af*, *ag*, & versi, *f*I, *g*II, æquales sint, adeoque parallelogramma curvili-

vilinea partialia, summa & ima, super æquales bases & ejusdem altitudinis omnia (v.g. duo lineata *a e* 2 I & *d a* II. I.) sint inter se æqualia, & consequenter etiam duo punctulata D *a* 2 B & *a e b* I. Quod si nunc basis B *a* (*n*.2.) in sex partes æquales divisa concipiatur, ductisq; semicirculis & per horum intersectiones cum cycloide transversis, erunt arcûs

& I *a* & V *a* $\frac{1}{6}$, 2 *a* & IV *a* $\frac{1}{3}$, 3 *a* & III *a* $\frac{1}{2}$ semicirculi, adeoque Sinus versi singulorum, h. e. altitudines respondentium parallelogrammorum æquales, & consequenter ipsa parallelogramma interioris & exterioris trilinei similiter signata, singula singulis æqualia. Hæc verò inscriptio parallelogrammorum curvilineorum & numero & magnitudine respectivè semper æqualium, cùm possit in utroque trilineo in infinitum continuari; evidenter intelligitur, ipsa trilinea, quorum inscripta infinita perpetuò sunt æqualia, inter se quoque æqualia esse.

PROPOSITIO XXIV.

Basis quadratricis AE (Fig. 150.) est cum semidiametro quadrantis genitoris AD & ipso quadrante BD in proportione continua.

Demonstratio.

NAm quadrans DB est ad radium DA ut arcus IB ad perpendiculum H*e*, per Consect. 1. Defin. XVI. & I*b* est ad H*e* ut A*b* ad A*e*, per Proposit. XXXIV. Lib. I.

Sed

Sed arcus IB (si concipiatur minor ac minor in infinitum) tandem coincidit cum Ib, eodem quippe momento in punctum B unà desinente, quo He in punctum E, adeoque Ae in AE & Ab in AB desinit. Erit ergo tandem DB ad DA ut IB (h.e. Ib) ad He, h.e. Ab ad Ae h.e. AB (s. DA) ad AE. Q.E.D.

Scholion I.

CLavius sub fin. Lib. VI. Euclidis aliique demonstrant hoc indirectè ducendo ad absurdum concludendi oppositum, hunc ferè in modum: Si DA vel AB non est ad AE ut DB ad DA, sit ita ad majorem Af vel minorem Ae. In priore casu igitur quoniam est AB ad Af ut DB ad DA per hyp. h.e. ut Kf ad Af, erunt quadrans Kf & radius AB vel DA inter se æquales. Sed ut BD est ad IB sic Kf ad Hf propter arcuum similitudinem; & ut BD ad IB sic etiam DA (sive = Kf) ad Sinum He, per Consect. 1. Defin. XVI. Ergo Sinus He & arcus Hf (ad quos idem Kf eandem rationem habet) erunt æquales; quod est absurdum. In posteriore casu, quoniam esset AB ad Ae ut DB ad DA per hyp. h.e. ut Le ad Ae, esset iterum quadrans Le & radius AB vel DA æquales. Sed ut BD est ad IB sic Le est ad Me propter arcuum similitudinem; & ut BD ad IB sic etiam DA (h.e. = Le) ad He, per Consect. 1. Defin. XVI. Ergo tangens He & arcus Me (ad quos idem Le eandem rationem habet) erunt æquales, quod iterum est absurdum.

Quare

Quare BD est ad DA non ut DA vel ad majorem Af vel ad minorem Ae; Ergo ut DA ad AE. Q.E.D.

Consectaria.

1.

PAlàm ergo est ex deductis, si mediante basi quadratricis AE ducatur quadrans, huic esse æquale latus quadratricis DA, & consequenter semiperipheriæ duplam DA, toti peripheriæ quadruplam.

2. Palàm etiam est, quadranti DB cujusvis circuli dati æqualem rectam haberi, si, descripta quadratrice, fiat ut AE ad AD sic AD ad tertiam, quadranti DB æqualem: quæ tertia proportionalis quadruplicata æquabitur toti peripheriæ.

3. Cuivis etiam arcui minori IB æqualis recta dabitur, si fiat, ut DA ad He, sic tertia proportionalis inventa (h.e. quadrans DB) ad quartam, vi Conf. 1. Def. XVI.

4. Quadratura igitur circuli, vi Conf. 2. Defin. XV. Lib. I. & anguli trisectio, vi Consect. 2. Definit. XVI. Lib. II. geometricè erit absoluta, si quadratrix inter geometricas censeri queat.

Scholion II.

ET sic quidem sensit *Clavius* cit. l. existimans, si quadratrix hæc ex numero geometricarum excludatur, eodem jure ellipsin, parabolam & hyperbolam ex illo ordine proscribendas esse, cùm illæ

non

non minùs quàm hæc per innumera puncta designari soleant. Mihi verò pace tanti viri neganda videtur hæc consequentia eodem jure, quo Cartesius Geom. p. 18. & 19. ejus conversam negavit, cujus virtute veteres suspicatur sectiones conicas &c. pro mechanicis & non-geometricis habuisse lineis, quia Spiralem, quadratricem, & similes, mechanicas tantùm esse deprehenderint. Scilicet hæc est differentia inter designationem quadratricis & conicarum sectionum per puncta, quòd harum omnia & singula puncta, ad axis quodcunque punctum datum relata, possunt geometricè determinari; cùm quadratricis non omnia promiscuè ad quodvis punctum quadrantis genitoris relata, sed ea tantùm geometricè determinari possint, quæ respiciunt punctum aliquod, à quo quadrans in duos arcûs certæ notæque proportionis dividatur. Quod si enim e. g. in quadrante BD punctum X pro lubitu detur, impossibile erit per Clavii regulam punctum quadratricis isti respondens definire, quia ratio arcuum DX & BX ignota est, neque adeò proportionalis sectio rectæ AD institui potest: Ut taceam, ultimum punctum E (quod primarium tamen est, & solum ad quadraturam necessarium) geometricè definiri, Clavii ipsius confessione, non posse. Simile prorsus judicium est de Spirali Archimedis similibusque, quæ per motus duos ab invicem non dependentes describi concipiuntur; prout Spiralis genesin cum hujus quadratricis genesi hactenusque dictis conferenti manifestum erit. Unde nec *Monantholii* Trisectio anguli dati per Spiralem tentata satis geometrica erit, quam scitè aliàs Lib. de Puncto cap. VII. p. 24. sic absolvere conatur: Ad centrum

descri-

descriptæ jam Spiralis & primam lineam BA (*Fig.* 151.) applicat angulum ABC dato *abc* æqualem: deinde per F & A, in quibus anguli crura helicem secant, circulis ductis, spatium intermedium DA dividit in tres partes æquales in I, & K: per hæc puncta porrò ducit circulos helicem secantes in L & M; tandemque ductis BLN, BMO, arcûs AO, ON, NC æquales esse ex ipsa genesi Spiralis facilè demonstrat. Eodemque modo non angulum solùm aut arcum quemlibet, sed integram etiam peripheriam in partes desideratas secare liceret geometricè; modò geometricis annumerari jure posset hæc Spiralis etiam linea; prout sanè Cycloïden, Conchoïden, Cissoïden, Logarithmicam &c. iis annumerandam putamus, ac ante hos annos 16 in Archimede nostro germanico annumeravimus; nunc confirmari à Mathematicis insignitissimis, *Leibnitzio*, *Craigio*, qui hujus generis lineas, etsi certi gradûs æquationibus exprimi non possint, invito etiam Cartesio Geometricis accensent, quia indefiniti saltem vel transcendentis gradûs æquationes admittant, calculoque æquè ac reliquæ subjici possint; licet is alterius sit naturæ quàm qui vulgo usurpatur. Videantur Acta Lips. anni 84. p. 234. & anni 86. p. 292. & 294.

CAPUT VI.

Totius Operis quasi EPILOGUS.

Atque nunc demum intelligi rectius possunt, quæ tradit *Honoratus Fabri* de Magnitudinibus figuratis in certas classes distribuendis, in Synopsi Geom. p. 57. & seqq. Scil.

I. Classis comprehendit figuras elementorum sive indivisibilium æqualium, quales sunt 1. parallelogramma omnia, quadratum, oblongum, Rhombus & Rhomboïdes, quorum elementa sunt lineæ rectæ omnes inter se æquales; vi *Definit. XII. Lib. I.* 2. Superficies convexæ sive concavæ, quarum elementa sunt lineæ curvæ per rectas parallelo motu actæ; quas inter præcipuè eminet cylindrica superficies, de qua vid. Definit. XVI. Lib. I. sub fin. 3. Parallelepipeda, & hæc inter Cubus, quorum indivisibilia sunt mera quadrata vel alia parallelogramma: 4. Prismata, ex motu trianguli, trapezii, vel polygoni cujuscunque per lineam rectam orta, quorum adeò indivisibilia omnia plano gignenti similia sunt & æqualia.

III Classis complectitur figuras elementorum progressione arithmetica simplici decrescentium; quales sunt 1. Triangula, prout ex Prop. 37. Lib. I. constat. 2. Circulus & Sectores circuli, quatenus in peripherias concentricas resolui concipiuntur, juxta Consect. 1. & 3. cit. Prop. 3. Cylindrus etiam, quatenus in superficies cylindricas concentricas, tanquam indivisibilia, resolvitur. 4. Superficies conica, cujus elementa sunt peripheriæ circulares, itemque Pyramidalis, cujus indivisibilia sunt peripheriæ angulares similes, arithmetica progressione utrobiq; crescentes. 5. *Conoides Parabolicum*, cujus indivisibilia sunt circuli in ratione abscissarum arithmetica progressione decrescentium, vi Proposit. 14. Lib. II. &c.

IV. Classis habet figuras elementorum progressione arithmetica duplicata crescentium; quales sunt 1. Pyramis & Conus, quarum illa in plana angularia, hic in circularia, resolvitur secundum seriem numerorum quadratorum crescentia; prout ex Prop. 38. Lib. I. ejusque consectariis compertum habemus: 2. Trilineum Parabolicum quale Prop. X. Lib. II. habuimus literis E b HK definitum. 3. Sphæra, quatenus ea resolvitur in superficies sphæricas

 con-

concentricas, quarum quælibet ut basis consideratur, semidiametro pro altitudine sumptâ; 4. Conus quatenus resolvitur in superficies Conicas parallelas ab indivisibilibus trianguli parallelis descriptas: 5. Residuum cylindri post ablatum hemisphærium ejusdem baseos & altitudinis, juxta Schol. I. Prop. 39. Lib. I.

IV. Classis complecteretur omnes magnitudines, quæ resolvuntur in elementa sive indivisibilia progressione arithmeticâ triplicatâ, quadruplicatâ &c. crescentium; quales equidem nullas hactenus habuimus, sed inter plana curvis superiorum generum terminata facilè reperimus; Vid. Synops. Fabriana p. m. 67.

V. Classis earum est magnitudinum, quarum indivisibilia decrescunt, à numero quadrato secundùm numeros impares procedendo, e. g. 36, 35, 32, 27, 20, 11 &c. quales equidem sunt 1. *Hemisphærium*, uti constat ex Prop. 39. Lib. I 2. *Hemisphæroides*, prout vidimus Proposit. XV. Lib. II. 3. *Semiparabola*, uti colligere est ex Demonstratione Proposit. 10. Lib. II. Cùm enim indivisibilia trilinei circumscripti *e b*, sint inventa in progressione arithmetica duplicata $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{16}{4}$, semiparabolæ indivi-

divisibilia necessariò erunt $\frac{16}{4}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{7}{4}$ &c.

VI. Classem nobis constituent eæ magnitudines, quarum indivisibilia simili progressione decrescunt, non ipsorum quidem numerorum à quadrato aliquo impariter descendentium, sed radicum horum maximam partem surdarum; qualis est inprimis *Semicirculus*, uti patet ex Proposit. 43. Lib. I. &, vi Prop. 5. Lib. II. etiam *Semiellipsis* &c.

VII. Classis posset sibi deposcere illas magnitudines, quarum elementa progrediuntur duplici serie numerorum, ut in *Conoide Hyperbolico*, de quo videri potest Schol. Prop. XVI. Lib. II.

Cæterùm, ut reliquas classes magnitudinum superioris generis, quarum considerationem hæc Elementa Mathematica aut non attigerunt, aut obiter tantùm attigerunt, hîc omittamus; (Videat autem qui volet Fabri Synopsin, ea præcipuè quæ p. 70. & seqq. ipsi sextam, septimam &c. classes constituunt,) circa hactenus distinctas duo solùm adhuc adnotâsse juvabit: 1. quòd, cùm in prima classe Parallelogramma & Cylindri, in secunda Triangu-

la, in tertia Pyramides & Coni, in quinta Hemisphæria, in sexta Semicirculi &c. primum sibi locum vindicent, haut incongruè cum Honorato primam Classem possimus appellare Cylindricarum vel *Parallelogrammium* figurarum, secundam *Triangularium*, tertiam *Pyramidalium*, quintam *Hemisphæricarum*, sextam *Semicircularium* &c. 2. quòd revocatis ita magnitudinibus homogeneis sive paris conditionis ad paucas classes, earum quoque dimensio, adeoq; res metrica universa ferè ad paucas regulas magno compendio reduci queat; prout ejus rei breve specimen hic dabimus per sequentia

Consectaria.

I.

PArallelogrammium, h. e. primæ Classis magnitudinum, dimensio habetur, si basis tota multiplicetur per totam altitudinem; Vid. Lib. I. Defin. XII. Conf. 7. Def. XVIII. Conf. 6. Def. XVI. Conf. 3. & 4.

II. Triangularium, h. e. secundæ classis magnitudinum, dimensio postulat baseos totius multiplicationem in dimidiam altitudinem, aut baseos dimidiæ in altitudinem totam;

[Vid.

[Vid. Lib. I. Definit. XII. Consect. 8. Definit. XV. Consect. 2. Definit. XVIII. Consect. 4. Lib. II. Proposit. XIV.] & harum, ad parallelogrammes respondentes ejusdem baseos & altitudinis, proportio est ut 1 ad 2. [Vid. præter alleg. etiam Lib. I. Proposit. 37. ejusque Conf. 1.]

III. Pyramidalium, h. e. tertiæ classis magnitudinum, dimensio nititur multiplicatione baseos per tertiam partem altitudinis; [Vid. Lib. I. Definit. XVII. Consect. 3. & 4. Definit. XX. Consect. 1. &c.] & harum proportio ad respondentes ex classe prima ejusdem baseos & altitudinis est, ut 1 ad 3. [Vid. præter alleg. etiam Lib. I. Proposit. XXXVIII. ejusque Consect. Prop. 39. Schol. I. Lib. II. Proposit. X. &c.]

IV. Hemisphæricarum, h. e. quintæ classis magnitudinum, proportiones ad respondentes ex classe prima ejusdem cum ipsis baseos & altitudinis, ut 2 ad 3. [Vid. Lib. I. Prop. 39. Lib. II. Prop. 10. & 15.] adeoq; dimensio earundem absolvetur multiplicando basin per $\frac{2}{3}$ altitudinis.

V. Semicircularium, h. e. sextæ classis magnitudinum, proportio ad respondentes ex classe prima ejusdem cum ipsis baseos & altitudinis, exprimi numeris integris paucisve non potest, [Vid. Lib. I. Proposit. 43. & Lib. II.

Prop. 11.] adeòque nec eorum dimensio numeralis exactè potest haberi.

Tantum hac vice
&
SOLI DEO GLORIA!

In

ANALYSIN SPECIOSAM

Sive

GEOMETRIAM NOVAM INTRODUCTIO.

Ad

Cartesii præcipuè methodum, sed ex recentioribus inventis multùm facilitatam, accommodata

Studio & Operâ

JOH. CHRISTOPHORI STURMII
Philos. Nat. & Mathem. P.P.

Ad

LECTOREM BENEVOLUM PRÆFATIO.

EX quo tempore hujus nostri, fini suo jam imminentis, seculi selectissima quæque ingenia, VIETÆ, OUGTHREDI, HARRIOTI, CARTESII, SCHOOTENII, BEAUNII, HUDDENII, HEURAETII, WITTII, SLUSII, iisque coævi alii plurimi Viri Celeberrimi, Veterum Algebram altiùs evehere, & consilio nunquam satis deprædicando à numeris ad symbola universalia transferre, ejusque fructûs in Geometria uberrimos tum degustare ipsi, tum propinare aliis felicissimè tentârunt; inventi deinceps alii subinde passim terrarum fuerunt, qui laudatissimos Antecessorum istorum vestigiis insisten-

sistentes, plus ultrà progredi quasi certatim anniterentur: habetq; præsens etiam ætas nostra, quos ostentet, suos WALLISIOS, BACKEROS, RENALDINOS, MENGOLIOS, HUGENIOS, MALEBRANCHIOS, LEIBNüTZIOS, CRAANIOS, aliosque plurimos, qui hanc Scientiarum scientiam, humanæ rationis fastigium meritò dicendam, summo suo fastigio magis magisq; admovent, inventisq; egregiis abundè locupletant. Intereà verò dum sublimia hæc ingenia ad summa tantùm ista omnem suam aciem intendunt, vix usspiam reperitur, qui ad istorum montium, ausu quasi giganteo sibi invicem superingestorum, radices se demittere, primosq; tyronibus ingressûs planâ faciliq; viâ pandere, ulterioresq; digito commonstrare, publicè quidem dignatus esset. Sanè vix unus alterq; elapsus annus est, cùm de hac tyrociniorum Analyticorum penuria in suis ad me literis conquereretur Amicorum

non-

nonnemo, Mathematis publicè docendis summâ cum laude suâ dudum felicissimè incumbens, & Isagogen quandam ad Analysin speciosam indicari sibi postularet, ad cujus ductum Auditoribus suis artis mirandæ fundamenta faciliùs explicaret. Cujus desiderio cùm satisfacere tum ex voto non possem, confestim apud animum meum cepi, de adornanda hujusmodi Introductione consilium, quod in opus ipsum tandem erupit, ea quâ hîc comparet formâ, certè tyronum conatûs ubique pro mea virili munerisque Professorii ratione promovendi studio ardentissimo, & in id cumprimis intento animo, ut artis præcepta vix sex aut septem pagellas explerent, exempla verò pluscula omnis generis lucem istis uberiorem affunderent. Quod si à proposita meta non penitùs aberravero, abundè compensatum mihi hunc qualemcunque laborem meum æstimabo; quem hoc demum loco MATHESI ENUCLEATÆ subjun-

jungere placuit , tum ut partem ejus aliquam, eamque præcipuam, tum verò ideò maximè, quòd illius primariis saltem capitibus, & fundamentis Logisticæ speciosæ vel Calculi literalis inibi jactis, instructum animum hæc Introductio præsupponeret. Vale, LECTOR HONORATISSIME, & conatûs hos qualescunque nostros gratos Tibi habe commendatosque.

IN-

INDRODUCTIO
in
ANALYSIN SPECIOSAM.

Cum *Ars Analytica* sive *Analysis Speciosa* inveniendis Theorematibus ac resolvendis Problematibus unicè inserviat, ex datis notisque in cognitionem quæsitorum & incognitorum concatenatis ac infallibilibus consequentiis animum sciendi cupidum deducens; ad quatuor primaria capita revocari possunt omnia, quæ stupendum hoc artificium complectitur, *Denominationem* puta, *Æquationem*, *Reductionem*, & *Effectionem* (si Problema Geometricum fuerit,) sive *Constructionem*.

I. DENOMINATIO.

DEnominationis voce intelligo præparatoriam nominum impositionem, peculiarem & facillimam, cùm datorum & quæsitorum quodlibet peculiari literâ alphabeticâ, vel etiam pluribus, ex arbitrio designamus, eo quidem (arbitrario pariter) discrimine, ut res notas ac datas Al-

phabeti literis prioribus, *a*, *b*, *c* &c. ignotas autem sive quæsitas postremis, *z*, *y*, *x* &c. notemus. Tametsi verò prorsus arbitraria est hæc nominum impositio, non parum tamen facilitatis in solutionem ipsam sæpe redundat, si quæsiti datorumque conditionibus accommodatior eligatur; id quod usu potiùs quàm præceptis quilibet edocetur: quemadmodum e. g. insigni compendio tum demonstrari theoremata, tum resolvi problemata usu edocti sumus, si duorum quantorum homogeneorum quamcunq; rationem per *a* & *ea*, *b* & *ib*, *d* & *od* &c. (rationum nomina scil. per *e* & *i* vel *o* &c. exprimendo) & proportionalitatem continuam per *a*, *ea*, e^2a, e^3a &c. discretam per *b ib*, *c ic*, *d id* aut similibus modis efferamus; prout Matheseos Enucleatæ Lib. I. cap. II. III. IV. VII. &c. Lib. II. CAP. I. &c. testari abundè poterunt.

II. ÆQUATIO.

IMpositis ita ritè nominibus, nullo amplius inter data & quæsita facto discrimine, sed omnia promiscuè, tanquam satis nota, tractando, sedulò evolvendæ sunt & excutiendæ omnes propositi circumstantiæ, varièque tentatâ quantitatum collatione,

tione, additione, subtractione, multiplicatione, divisione &c. in id unicè incumbendum, ut una & eadem quantitas duobus modis exprimatur; id quod *Æquationem* appellamus: Et hujusmodi æquationes, sive æquales quantitatum literalium complexûs (eandem quippe rem exprimentes) inveniendæ sunt totidem, quot occurrunt in quæstione incognita, ab invicem non dependentia, totidemque adeò literis diversis *z*, *y*, *x* &c. denominata. Quod si verò tot æquationes non inveniantur, exhaustis per unam aut alteram omnibus quæstionis circumstantiis; indicio id est, reliquas ignotas ad arbitrium assumi posse: id quod exempla postmodum edocebunt ampliùs.

Quemadmodum verò hîc etiam (ut in universa hac arte) usus & ingenium plus quàm regulæ & præcepta valent; ita fontes tamen indicandi sunt, in gratiam tyronum præcipui, è quibus æquationes, occasione circumstantiarum in quæstione obviarum, hauriri plerumq; solent. Illi verò sunt partim axiomata naturâ nota, e. g.

Quòd totum æquetur suis partibus simul sumptis,

Quòd inter se sint æqualia, quæ sunt æqualia uni tertio,

Quòd

Quòd facta sub partibus sive segmentis singulis aequentur facto sub toto &c. &c.

partim Theoremata quaedam universalia jam certa & demonstrata, ut,

Quòd propositis tribus (α) continuè-proportionalibus, factum extremorum aequetur quadrato medii, &

Propositis quatuor (β) sive continuè- sive discretim-proportionalibus, factum extremorum facto mediorum aequale sit,

& similia plura ex iis, quae Cap. II. III. & IV. Lib. I. Matheseos Enucleatae demonstravimus; partim denique specialia quaedam theoremata Geometrica suis demonstrationibus jam firmata, v. g. commune illud Pythagoricum,

Quòd in triangulis rectangulis (γ) quadratum hypotenusae adaequet duo quadrata laterum;

Quòd quadratum tangentis (δ) circulum aequetur rectangulo ex secante ejusq; segmento extra circulum cadente; quorum illud Lib. I. Mathes. Enucl. Definit. XIII. Schol. itemque Prop. XXXIV. Consect. 8. nec non Prop. XLIV. variis modis, hoc Prop. XLVII.

Y de-

(α) Euclid. VI. 17.
(β) Id. VI. 16.
(γ) Id. I. 47.
(δ) III. 36.

demonstravimus; quibusque annumerari porrò debent Prop. XXXIV. cum Schol. II. n. 3. Prop. XXXVII. & seqq. plures, Proposit. XLV. & XLVI, itemque XLVIII. aliæque plurimæ Lib. I. Mathes. Enucl. & ex Lib. II. Prop. I. II. III. & consequentes aliæ pleræque. Cæterùm exempla tum Denominationum, tum Æquationum diversimodè repertarum, ex infra subjiciendis pluribus, aliquot hîc in antecessum videri possunt.

III. REDUCTIO.

Æquatio sic reperta reduci debet, h. e. quantitates illæ duæ æquales, plerumque ex datis & quæsitis valdè compositæ, addendo subinde aut demendo quippiam ex utraque parte, vel multiplicando aut dividendo per idem &c. ad eam formam redigendæ, ut quantitas ignota sive quæsita sola, aut ejus quadratum, aut Cubus, aut quadrato-quadratum &c. habeatur solitarium ex una parte, ex altera verò quantitas vel datis notisque meris expressa, vel ignotis quæsitisque adhuc affecta; quales equidem formulæ sunt sequentes, adjectis nominibus discerni solitæ,

Æquatio simplex, $z = b$; vel $y = \frac{ab}{c}$.

Qua-

Quadratica simplex, $yy = ab$; vel $xx = \frac{aa - bb}{2}$

Cubica simplex, $z^3 = abc$; vel $y^3 = \frac{a^3bb}{cd}$

Quadratica affecta, $x^2 = -ax + b^2$; vel $y^2 = 2by + \frac{2abc}{d}$

Cubica affecta, $z^3 = az^2 + b^2z - c^3$ &c.

Quadrato-quadratica, $y^4 = ay^3 + b^2y^2 - c^3y + d^4$ &c.

Ad quarum unam, sive earum similem aliam, ubi reducta fuerit æquatio primùm inventa, in promptu postea sunt regulæ, quibus valor incognitæ sive quæsitæ quantitatis z, aut y, aut x, vel exprimi numeris possit, si quæstio fuerit arithmetica; vel geometricè determinari, si geometrica: id quod *Effectionem* vel *Constructionem* appellamus.

Sic igitur cardo totius Analyseos vertitur præcipuè in Æquatione opportunè invenienda: Reductio enim facillima est, utpote operationibus facillimis & meris axiomatis nixa; quòd e.g.

Si æqualibus addantur aut demantur æqualia, etiam aggregata aut residua sint æqualia;

Si æqualia multiplicentur aut dividantur per idem, etiam producta aut quoti inde oriundi sint æquales &c.

IV. EFFECTIO
sive
CONSTRUCTIO
I. In Æquationibus simplicibus.

1.

SI z sit $= b$, ipsa quantitas b est quæsitum.

2. Si z sit $= \frac{ab}{c}$ — fiat ut c ad b sic a ad z,

vel $x = \frac{aa}{b}$ — ut b ad a sic a ad x,

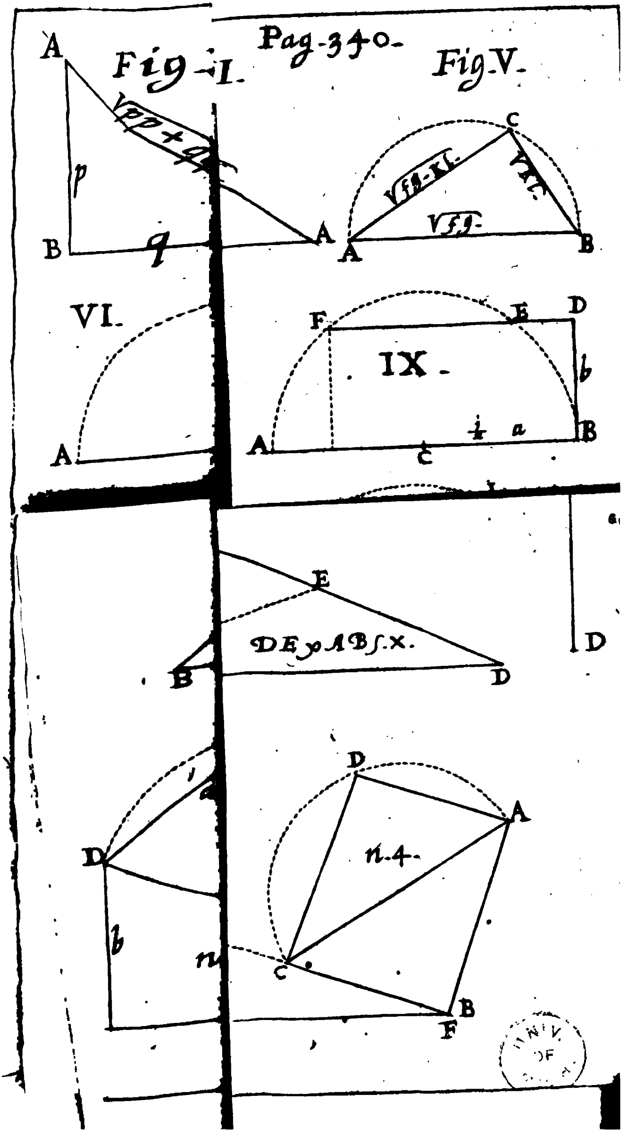
vel $y = \frac{fb + fg}{h - 1}$; fiat ut $h - 1$ ad $b + g$, sic f ad y,

vel $z = \frac{fb - fg}{h + 1}$ — ut $h + 1$ ad $b - g$, sic f ad z

&c. ubique juxta n. 2. Schol. II. Prop. XXXIV. Lib. I. Mathes. Enucl.

3. Si z sit $= \frac{kl + mn}{r + s}$, resolutio in proportionales est difficilior, quia neutræ literæ in numeratore bis habentur. Ut igitur

Pag. 340.



e.g. k bis habeatur, faciendum ut k ad n sic m ad quartam proportionalem, quæ sit p; eritq; vi Prop. XVIII. Lib. I. $kp = mn$, & Æquatio proposita mutata in hanc: $z = \frac{kl + kp}{r + s}$, ex casu 2. nunc construendam.

Vel si $y = \frac{kl + mn}{r - s}$, inveniantur mediæ proportionales inter k & l, quæ sit p, ad inter m & n, quæ sit q, juxta n. 3. alleg. antè Schol; poteritque æquatio proposita vi Prop. XVII. nunc subire hanc formam: $y = \frac{pp + qq}{r - s}$. Fiat igitur in △ Rectangulo (*Fig. I.*) AB $= p$ & BC $= q$; eritque □ AC, vi Theorem. Pythag. $= pp + qq$: quod cùm dividendum sit per $r - s$, fiat porrò, vi Prop. XVIII, ut $r - s$ ad $\sqrt{pp + qq}$ sic $\sqrt{pp + qq}$ ad y, juxta superiùs citt.

4. Similiter si x fit $= \frac{bg - mn}{c + d}$, fiat primò ut b ad m, sic n ad quartam, quæ sit k; ponendoque adeò bk pro mn, æquatio erit reducta ad casum secundum sub hac forma: $x = \frac{bg - bk}{c + d}$.

Vel sic: Inquirantur mediæ proportio-

nales inter b & g, quæ sit p, ac inter m & n, quæ sit q; poteritque æquatio proposita nunc subire hanc formam: $x = \frac{pp-qq}{c+d}$.

Fiat igitur (*in Fig. II.*) AB $= p$; & super hac descripto semicirculo applicetur BC $=$ q; eritq; vi Schol. V. Prop. XXXIV. $\square$ AC $= pp - qq$: quod cùm dividendum sit per $c + d$, fiat porrò,

ut $c + d$ ad $\sqrt{pp-qq}$, sic $\sqrt{pp-qq}$ ad x; omnia ex iisdem fundamentis, è quibus constructio casûs 3.

5. Si fuerit $z = \frac{aabc}{ffg}$; fiat primò, ut f ad a sic a ad tertiam proportionalem m, habebiturque (ponendo fm pro aa) $z = \frac{fmbc}{ffg}$ h. e. $\frac{mbc}{fg}$. Fiat secundò, ut f ad m, sic b ad quartam n, ponendoque fn pro mb, erit $z = \frac{fnc}{fg}$ h. e. $\frac{nc}{g}$. Quare tertiò erit, ut g ad n, sic c ad z.

6. Si fuerit $y = \frac{bll}{mm}$; fiat primò, ut m ad b, sic l ad quartam, quæ sit n, ponendoque jam mn pro bl, erit $\frac{mnl}{mm}$ h. e.

h. e. $\frac{nl}{m} = y$. Ergo nunc erit secundò, ut m ad n, sic l ad y, per Cas. 2. ut quinti sextique casuum constructio nihil aliud sit quàm iteratio aliquotuplex Regulæ De Tri. juxta sæpiùs allegg. n. 2. ac 3. Schol. II. Prop. XXXIV.

II. In Æquationibus quadraticis simplicibus.

I.

SI $xx = ab$ vel $y^2 = 1c$ vel $z^2 = \frac{3}{4}dd$ } erit { $x = \sqrt{ab}$, $y = \sqrt{1c}$, $z = \sqrt{\frac{3}{4}dd}$ } h. e. mediæ proportionali inter { a & b. 1 & c. $\frac{3}{4}d$ & d.

adeoq; constructio parata ex n. 3. Schol. II. Prop. XXXIV. (*Vid. Fig. III.*)

2. Si $y^2 = fg + kl$ vel $x^2 = fg - kl$ } erit { $y = \sqrt{fg + kl}$, $x = \sqrt{fg - kl}$. Fiat igitur

Ibi △ Rectang. A B C (*Fig. IV.*) cujus latus
AB = med. proport. inter f & g,
BC = med. proport. inter k & l;

Hîc △ Rect. (*Fig. V.*) cujus hypot. A B sit = med. proport. inter f & g,
& latus B C = med. prop. inter k & l:

eritque, ibi hypotenusa } A C valor { y quæsitus.
hîc latus } ipsius { x situs.

 Omnia

Omnia vi Theorem. Pythag. & juxta Schol. V. Prop. XXXIV. vel Consectaria Proposit. XLIV, Vid. Fig. IV. & V.

3. Si $z^2 = \frac{fhhkk}{fcc}$ h. e. $\frac{hhkk}{cc}$; extractis ubique radicibus, erit $z = \frac{hk}{c}$, adeoq; casus 2. Æquationum simplicium.

4. Si y^2 sit $= \frac{fghk}{lm}$; fiat primò ut l ad f, sic g ad quartam, quæ sit n; ponendoque ln pro fg, erit $y^2 = \frac{lnhk}{lm}$ h. e. $\frac{nhk}{m}$. Fiat secundò, ut m ad n, sic h ad quartam, quæ sit p; ponendoq; mp pro nh erit $y^2 = \frac{mpk}{m}$ h. e. pk, adeoq; casus 1 præsentium.

5. Si x^2 sit $= \frac{qbcc + bccd + qbcd + bcdd}{fg + lm}$; primum rectangula fg & lm in quadrata conversa & in unam Summam collecta, fiant e. g. æqualia nn. Deinde (cùm cc & cd multiplicata sint per $qb + bd$) similiter qb & bd addita faciant pp; & habebi-

bebitur $x^2 = \frac{ppcc + ppcd}{nn}$. Tertiò (cùm pp jam sit multiplicatum in $cc + cd$) additis in unam summam $cc + cd$, ut e. g. faciant rr; erit $x^2 = \frac{pprr}{nn}$, adeoq; casus tertius præsentium.

III. In Æquationibus quadraticis affectis.

I.

SI zz sit $= az + bb$, erit $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; id quod brevissimè sic à priori demonstratur: Cùm $z^2 - az$ sit $= bb$ *per hyp.* & prior illa quantitas, si addatur $\frac{1}{4}aa$, evadat quadratum exactum; cujus radix est $z - \frac{1}{2}a$; igitur $z^2 - az + \frac{1}{4}aa = bb + \frac{1}{4}aa$, & consequenter $z - \frac{1}{2}a = \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}$, tandemq; $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$

vel $= \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Quæ posterior tamen radix falsa est ac nihilo minor, æquationem interim propositam æquè ac illa prior restituens: prout rem tentanti patebit, translata scil. $\frac{1}{2}a$ in alteram partem & sic duobus æqualibus $z - \frac{1}{2}a$ & $-\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ quadratè multiplicatis.

Provenit enim hìc æquè $\frac{1}{4}aa + bb$, ac si signo + affectum sit radicale signum, quia — per — facit +. Ergo $zz - az + \frac{1}{4}aa =$ $\frac{1}{4}aa + bb$, & ablato utrinq; $\frac{1}{4}aa$, $zz - az =$ bb, h. e. $zz = az + bb$.

Habebitur igitur geometricè valor hujus radicis, faciendo (*in Fig. VI.*) CD $= \frac{1}{2}a$ & DE perpendiculari $= b$, ut hypotenusa CE sit $\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; porròque, protractâ utrinque CD, intervallo CE describendo semicirculum AEB: Hoc enim facto erit AD valor quæsitus veræ radicis z, & DB falsæ:

Vel cum Cartesio (*Fig. VII.*) factâ CD $= \frac{1}{2}a$ & DE $= b$, erit CE $= \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & consequenter AE valor veræ radicis z, BE verò falsæ.

2. Si y^2 sit $= -ay + bb$, erit $y = -\frac{1}{2}a +$ $\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; id quod iterum hoc modo patescet: Cùm $y^2 + ay$ sit $= bb$ *per hyp.* addito utrinque $\frac{1}{4}aa$, erit prior quantitas exactum quadratum & $y^2 + ay + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa$ $+ bb$. Ergo radices quoque erunt æquales, nempe $y + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & consequenter $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$

vel $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: quæ tamen est falsa radix.

Valor

Valor autem harum radicum geometricè habebitur, veræ nimirum DB in Fig. VI. vel BE in Fig. VII. falsæ verò ibi AD, hîc AE.

3. Si xx sit $= ax - bb$, erit

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb}$$

vel $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Id quod à priori eodem modo, quo casûs superiores, demonstrari potest. Scil. cùm $x^2 - ax$ sit $= -bb$, addito utrinq; $\frac{1}{4}aa$, erit prior quantitas exactum quadratum, nempe $x^2 - ax + \frac{1}{4}aa = aa - bb$. Ergo radix illius $x - \frac{1}{2}a =$ radici hujus, nimirum $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & addito utrinq; $\frac{1}{2}a$,

$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, quæ est una verarum radicum

vel $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, quæ in hoc casu etiam est vera. Obtinebitur autem valor utriusque faciendo (*Fig. VIII.*) CB $= \frac{1}{2}a$ & BD erigendo perpendiculariter $= b$, factoq; semicirculo BEA & ductâ DE parallelâ cum CB, demittendo perpendicularem EF: Sic enim CF erit $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ & consequenter AF $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, FB verò $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Vel cum Cartesio (*Fig. IX.*) facta CB = $\frac{1}{2}a$ & BD = b, ducendo DF parallelam cum CB, ut FD sit una & ED altera radix; prout ex antecedente constructione ejusque regula manifestum est. Vide aliam quoque deductionem Constructionum Cartesianarum Schol. I. Proposit. XLVII. Lib. I. Mathes. Enucl.

NB. 1. Modum hunc demonstrandarum, imo inveniendarum, harum regularum praivit nobis Ingeniosissimus Schootenius Comment. in Geom. Cartesii p. m. 163. quin & alium admodum ingeniosum per omnes tres harum Æquationum casus deducit, ope sublati secundi ex Æquatione termini, p. 290. & seqq. ubi circa casum tertium hoc solùm notare nobis liceat; meliùs fortè deductum iri regulam, si ponatur $x = \frac{1}{2}a - z$ *potiùs, quàm* $x = z + \frac{1}{2}a$.

NB. 2. Si cui Abbatis Catelani novas Constructiones Æquationum quadraticarum affectarum videre sit volupe, consulat Acta Lips. ad Ann. MDCLXXXII. p. 86. ex Diar. Gall. XXVII. 1. Dec. 1681.

IV. In Æquationibus Cubicis & Quadrato-quadraticis, sive affectis sive non-affectis.

Quin-

Quinimò in superioribus omnibus, atque adeò universalissimè in æquatione quacunque quartum gradum non excedente.

Valor incognitæ quantitatis sive radicis unicâ regulâ generalissimâ, unius parabolæ beneficio, in casu quovis determinari potest, quam adinvenit *Thomas Bakerus* Anglus, occasione disquisitionis eorum, quæ Cartesius Lib. III. Geom. p. 85. & seqq. in hanc rem docuerat, nunc mirum in modum per hanc regulam perfecta & ad simplicitatem reducta. Hujus ergo regulæ vis ac sensus ut à tyronibus rectè capiatur, sequentia veniunt præmonenda:

1. Æquationes omnes sub iis formulis, quas superiùs in articulo de Reductione exhibuimus, similibusque occurrentes, hoc loco in eam formam transmutatas semper spectari, quæ ex una parte æquationis terminos habeat omnes, notos ac ignotos, affectos & non-affectos, promiscuè, ex altera verò parte o sive nihilum; ut e. g.

$a - b$ sit $= o$ vel $y - \frac{ab}{v} = o$; vel

$yy - ab = o$; vel $xx - \frac{aa + bb}{2} = o$; vel

$z^3 - abc = o$; vel $y^3 - \frac{a^3bb}{ca} = o$; vel

$x^2 + ax$

gulæ suæ p. 91. rationem inveniendi duas medias proportionales, & angulum quemcunque in tres partes æquales dividendi adinvenisset, deinceps ad alia Problemata solida solvenda, aut duas medias proportionales, aut anguli trisectionem adhibeat; *Backeri* regula generalissima nec his opus habet, nec termini secundi sublatione, nec ullâ aliâ præparatione, sed immediatè oblatæ cujuscunque Æquationis quomodolibet affectæ, sive deficientis aliquo aut aliquibus terminis, sive non deficientis, omnes radices, tam veras quàm falsas, ope circuli & uniuscujusq; parabolæ elicere docet, eo quem nunc dabimus, paulò distinctiùs forte, modo.

I. Supponit cum Cartesio jam descriptam esse Parabolam NAM (*Vid. Fig.* X. & *XI.*) cujus latus rectum sit L sive 1, & axis *ay*; quo solo cùm usus esset Cartesius, nec de aliis diametris cogitâsset, coactus est terminum Æquationis secundum tollere &c. *Backerus* igitur (hoc suo cogitato mirum quantum perficiens Geometriam Cartesianam) si quantitas *p*, sive terminus secundus, in Æquatione proposita habeatur, ordinatim applicat axi *ay* lineam BA $= \frac{p}{2}$ h. e. vertici axeos *a* dextrorsum erigit perpendi-

pendicularem $aE = \frac{p}{4}$ & ex E agit EAy parallelam axi ay; quo ipso obtinet diametrum Ay desideratam.

II. His ita præparatis, totius rei cardo in eo vertitur, ut inveniatur centrum circuli per parabolam describendi; quod equidem (vi suppositionum ab initio arbitrariarum) à sinistra diametri vel axeos perpetuò quærit, ope duarum linearum, $\frac{AD}{aD}$ sive b, & DH sive d; ponendo scil. priorem super axe ex a in D, si p defuerit in æquatione; vel super diametro Ay ex A in D, si p habeatur; & ex puncto D posteriorem ad aD vel AD perpendiculariter sinistrorsum emittendo.

III. Utriusque verò lineæ quantitatem (ante omnia hic requisitam) in proposita qualibet Æquatione elicere docet ex regula quadam generalissima (quam, quia ad centrum H inveniendum unicè facit, centralem appellat) hisce terminis comprehensa:

$$\text{Pars}\begin{cases} 1.\ \frac{L}{2} + \frac{p^2}{8L} \backsim \frac{q}{2L} = b = \frac{AD}{aD} \text{ vel} \\ 2.\ \frac{p}{4} + \frac{p^3}{16L^2} \backsim \frac{pq}{4L^2} \backsim \frac{r}{2L^2} = d = DH. \end{cases}$$

IV. Hæc verò regula, prout hîc jacet integra, illis solùm Æquationibus respondet, in quibus omnes quantitates p, q, & r occurrunt, h. e. nullus terminus deficit; & tamen interim accommodari facilè casibus omnibus aliis potest, his tantùm observatis: 1. Quæcunque ex quantitatibus p, q, r, in Æquatione proposita defecerit, eam quoque ex regula centrali generali esse expungendam, ut residuæ determinent regulam centralem specialem. 2. Ad signa quod attinet, utrum scil. $+$ an $\backsim$, (quod posterius notat casum dubium, si prius à posteriore, an contrà, sit subtrahendum, prout nimirum res ipsa est passura) in regula speciali ponendum sit, adnotat (α) in regula continuò haberi $+ \frac{r}{2L^2}$, nisi cùm in æquatione proposita p & r diversis signis affectæ fuerint: (β) quocunque signo in æquatione proposita denotari contigerit quantitatem q, contrario quidem in regula (aliâ licet involutam quantitate) designandam esse: prout equidem hæc applicatio regulæ ad omnes casus speciales ab ipso Autore in tyronum gratiam jam facta exhibetur in Synopsi adjecta, quam nos tamen, quoad regulas centrales multò contractiorem, h. e. ad compendium sub hujus tra-

SYNOP. Ad Pag. 354.

Æquatiunlarum Centralium.

Classis I. = AD, o = d = DH.

II. $\begin{cases} 1.\ x^2 * - \\ 2.\ x^2 * \dagger\ q \end{cases}$ = b, = AD, o = d = DH.

impossi

III. $\begin{cases} 1.\ x^3 ** - = \text{AD} \\ 2.\ x^3 ** \dagger = \text{DH} \end{cases}$

$\begin{cases} 1.\ x^3 * - \\ 3.\ x^3 - px \\ 4.\ x^3 \dagger px \end{cases}$ $\frac{}{2}$ = b = AD; $\dagger \frac{pq}{4} - \frac{r}{2}$ = d = DH

VIII. $\begin{cases} 5.\ x^3 - px \\ 6.\ x^3 \dagger px \end{cases}$ $\backsim \frac{q}{2}$ = b = AD; $\backsim \frac{pq}{4} \backsim \frac{r}{2}$ = d = DH

$\begin{cases} 7.\ x^3 - p \\ 8.\ x^3 \dagger p \end{cases}$ $\backsim \frac{q}{2}$ = b = AD; $\backsim \frac{pq}{4} \dagger \frac{r}{2}$ = d = DH.

NB. *Signu* ... *ente, vel consequens ab antecede*

tractationis finem adnotatum accommodatam dare maluimus.

V. Ex his igitur regulis quantitas linearum *a*D, vel AD, & DH sic determinatur, ut partes in regula signo † affectæ (sive aggregatim, sive sigillatim) ab *a* vel A deorsum versus *y*, & â D sinistrorsum ponantur, inde verò partes negativæ sive signo - affectæ, ibi sursum, hîc dextrorsum rescindantur: quo facto centrum H inventum fuerit

VI. Ex centro H per verticem axeos *a* (si punctum D in axe inventum fuerit) aut pèr verticem diametri A in altero casu, ducendus est circulus, qui parabolam secando vel tangendo radices quæsitas determinet, siquidem æquatio biquadratica non fuerit, h. e. quantitatem S non habeat: aliàs punctum aliud L vel *Z* inveniendum est (*Vid. Fig. XII. & XIII.*) ac radio HL vel H*Z* describendus circulus, prorsus ad mentem Cartesii p. 86. & seqq. Geom.

VII. Nimirum, si habeatur —S, oportet in linea H*a* vel HA producta ex una parte sumere AI = L sive 1, & ex altera parte AK = $\frac{S}{L}$, descriptoque super IK

semicirculo, ducatur AL perpendicularis ad AH, ut habeatur punctum L (*Vid. Fig. XII.*) Quod si verò habeatur † S, in alio semicirculo super AH descripto applicanda est linea AZ = inventæ AL, ut habeatur punctum Z. (*Vid. Fig. XIII.*)

VIII. Circulus igitur descriptus ex H per *a* vel A, si defecerit S, per L. verò si habeatur —S, & per Z, si habeatur † S, secare vel tangere parabolam potest in 1. 2, 3 aut 4 punctis; à quibus si ad axem vel diametrum demittantur perpendiculares, obtinebuntur omnes æquationis radices, tam falsæ, quàm veræ.

IX. Et quidem 1. si in æquatione defecerit *p* & sit —*r*, veræ radices erunt ad partem sinistram axis, ut NO, falsæ verò, ut MO, ad dextram: 2. Si verò in æquatione habeatur *p* & sit —*p*, veræ radices cadent ad sinistram partem diametri, falsæ ad dextram; sin † *p*, contrà veræ ad dextram, falsæ ad sinistram.

X. Quod si verò hic circulus nec secet, nec tangat parabolam in ullo puncto, indicio id est, æquationem esse impossibilem, nullamque admittere radicem neque veram neque falsam, sed tantùm imaginarias.

Quæ omnia, ut inventa ſint, à priori, & quòd indubia ſint, à poſteriori quamvis fideliter & planâ facilique viâ demonſtret Autor per casûs ſingulos, hujus loci tamen haut eſt illas demonſtrationes tyronibus exhibere; utpote qui, poſteaquam aliquousque in hac arte progreſſi fuerint, ex ipſo Autore illas petere majore cum fructu poterunt.

XI. Quin igitur (omiſſâ quoque hac vice doctrinâ de Locorum planorum & ſolidorum compoſitione, quæ eſt Analyſeos complementum) ad praxin regularum hactenus traditarum feſtinamus; hoc unum adhuc ex *Backero* prænotantes, ſi latus rectum ſive L ſumatur pro unitate, poſſe L in regulis centralibus cum omnibus ſuis gradibus omitti, easque adeò compendioſiores exhiberi: prout à nobis in Synopſi jam factum, & ex regulæ centralis generalis formula hîc ſubjecta, ſi cum ſuperiori comparetur, judicare eſt.

Pars 1. $\frac{1}{2} \dagger \frac{p^2}{8} \overset{\dagger}{S} \frac{q}{2} = b = \frac{aD}{AD}$ vel

Pars 2. $\frac{p}{4} \dagger \frac{p^2}{16} \overset{\dagger}{S} \frac{pq}{4} \overset{\dagger}{S} \frac{r}{2} = d = DH.$

Cui *Backeri* monito illud etiam ſuperaddi poteſt, ſi linea quædam in ipſo problema-

te data pro unitate ſumatur, id quod commodiſſimè ſæpe fit [ut *a* in Problem. priore p. 91. Geom. Carteſ. & NO linea in poſteriore ibid. & *a* rurſum in æquatione p. 83. lin. ult., procul dubio] tunc eandem lineam inſimul ſumendam eſſe pro latere recto deſcribendæ parabolæ, ſi hoc uti compendio in abbreviandis regulis centralibus velimus. Aliàs enim, ſi per unicam Parabolam, uti *Backerus* haut vanè quidem pollicetur, omnia velimus conſtruere Problemata, in magnam ſæpe prolixitatem incidemus.

EXEMPLA

quædam

ANALYSEOS SPECIOSÆ

Per singula Æquationum genera.

I. Æquationum prorsus simplicium.

PROBLEMA I.

DAtis pro formando triangulo ABC binorum quorumcunq; laterum summis, ipsa latera singula invenire, ac triangulum ipsum formare.

Sint e.g. datæ tres lineæ *in Fig. XIV.* exhibitæ, prima pro AB † AC in triangulo quæsito, secunda pro AB † BC, tertia pro BC † AC, & quærantur singula latera, h. e. quæratur AB, quo noto cætera non possunt ignorari.

SOLUTIO.

1.

DEnominatio. Sit AC † AB = *a*, AB † BC = *b*, BC † AC = *c*, AB = *x*, erit AC = *a*—*x*, & BC = *b*—*x*, atq; ita denominatio absoluta.

2. *Æquatio.* Quod si nunc valores duarum ultimarum linearum BC & AC addantur in unam Summam, quam priùs jam habebamus datam; habebitur æquatio; $a+b-2x = c$.

3. *Reductio.* Addendo utrinq; $2x$, erit $a+b = c+2x$; & subtrahendo utrinq; c, $a+b-c = 2x$; & dividendo utrinq; per 2, $\frac{a+b-c}{2} = x$.

4. *Effectio* sive *Constructio geometrica*, quam Æquatio sic reducta subministrat: Jungantur AE = a & ED = b in unam lineam AD, & ex hac retrò resecetur DF = c; quæ restat AF dividatur in B bifariam, & habebitur AB latus formandi trianguli primum; BE verò dabit alterum latus AC, & hoc subtractum ex ED, relinquet GD = tertio lateri BC: E quibus jam facilè formabitur triangulum ABC.

5. *Regula generalis pro casibus Arithmeticis*: Addantur duæ Summæ priores, & ex aggregato subtrahatur Summa tertia; residui dimidium dabit latus AB commune duabus Summis prioribus. Exempli loco possit esse hæc quæstio: *Antiquæ Hetruriæ tria oppida, Forum Cassii* (quod notet in △ ABC litera A) *Sudertum* (B) *&* *Volsinii* (C) *hanc deprehensa sunt inter se habere distantiam; Volsiniis ituro ad Forum Cassii, atque inde Sudertum, emetienda sunt stadia 330; à Foro Cassii Sudertum, ac porrò Volsinios, stadia*

dia numerantur 306: Deniq; Suderto Volsinios, & inde ad Forum Cassii, iter est stadiorum 272. Quanto intervallo distant inter se oppida singula?

PROBLEMA II.

Datis, pro triangulo rectangulo ABC, basi AB & differentiâ catheti AC ab hypotenusa BC, invenire cathetum & hypotenusam ac triangulum ipsum formare. Sint e. g. datæ futura basis AB (*Fig. XV.*) & differentia catheti ab hypotenusa BD, & quæratur cathetus AC; quo noto hypotenusa BC non potest ignorari, modo differentia data invento catheto addatur.

SOLUTIO.

1.

Denominatio. Sit AB $= a$, BD $= b$, AC $= x$; erit BC $= x + b$.

2. *Æquatio* per Theor. Pythag.

$xx + aa = xx + 2bx + bb$, nimirum duo quadrata laterum simul sumpta, quadrato hypotenusæ.

3. *Reductio.* Utrinque subtrahendo xx, erit $aa = 2bx + bb$; & porrò subtrahendo bb, $aa - bb = 2bx$; ac dividendo per $2b$, $\frac{aa - bb}{2b} = x$.

4. *Effectio* seu *Constructio geometrica:* Super AB basi data descripto semicirculo applicetur data differentia BD, & ducatur AD, cujus quadratum est $= aa - bb$ Hoc cùm dividendum sit per $2b$, fiat porrò, ut AE $= 2b$, ad AD $= \sqrt{aa - bb}$ sic AD $= \sqrt{aa - bb}$ ad AC cathetum quæsitum. Cui si addatur CF $=$ BD, habebitur AF $=$ hypotenusæ quæsitæ BC: quæ sponte quoque sua se offeret unà cum toto triangulo quæsito, si cathetus AC inventus super basi data AB ad angulos rectos erigatur.

5. *Regula pro casibus Arithmeticis:* E quadrato datæ baseos subtrahatur quadratum datæ differentiæ, & residuum dividatur per differentiæ duplum; ita provenier cathetus desideratus. E.g. sit basis 20. pedd. differentia inter cathetum ac hypoten. 10.

PROBLEMA III.

D*Atis, pro triangulo rectangulo, ABC latere AC & Summâ reliqui lateris AB ac hypotenusæ BC, invenire latus reliquum & hypotenusam seorsim, ac triangulum ipsum formare.* Sint e.g. data futurum latus AC (*Fig. XVI.*) & Summa reliquorum AD, & quæratur latus AB, quo noto hypotenusa BC non potest ignorari.

SOLUTIO.

1.

D*Enominatio.* Sit AC $= a$, AD $= b$, AB $= x$, erit BC $= b - x$.

2. *Æqua-*

2. *Æquatio*: $xx + aa = bb - 2bx + xx$, & subtrahendo xx.

3. *Reductio*: $aa = bb - 2bx$; & addendo $2bx$,

$aa + 2bx = bb$; & subtrahendo aa,

$2bx = bb - aa$; & divid. per $2b$,

$$x = \frac{bb - aa}{2b}.$$

4. *Effectio* seu *Constructio* præcedenti simillima, ideoq; solâ Fig. XVI. inspectione manifesta futura.

5. *Regula arithmetica*: Ex quadrato Summæ datæ subtrahatur quadratum lateris dati, & residuum dividatur per Summæ datæ duplum; sic habebitur latus alterum, & hoc subtracto ex data Summa, etiam hypotenusa. E.g. sit latus unum 15, & Summa reliquorum 45.

PROBLEMA IV.

Datis duorum triangulorum rectangulorum, æquales hypotenusas habentium, cathetis & basium Summâ, invenire bases seorsim, ac triangula tota formare. Sint e.g. pro △ ABC formando (*Vid. Fig. XVII.*) cathetus datus AB, & pro altero △ ADC cathetus CD, basiumq; Summa data BE, & quærantur bases seorsim, minor scil. BC

pro

pro catheto majore, & major AD pro catheto minore.

SOLUTIO.

I.

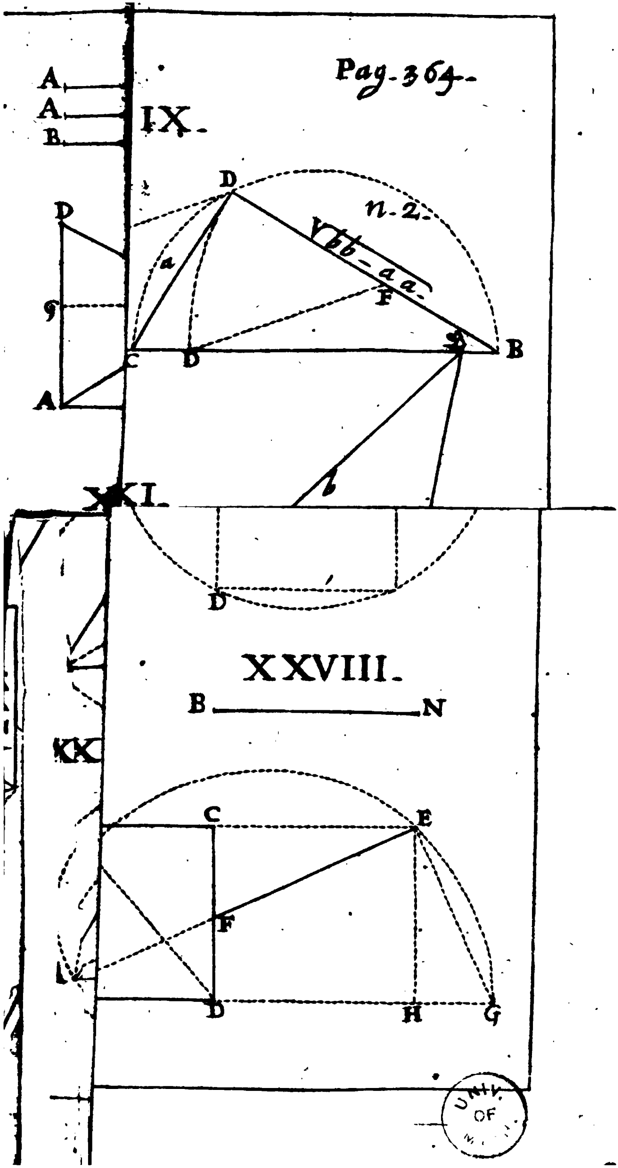
DEnominatio. Sit AB = a, CD = b, Summa BE = c; dicatur basis minor BC = x; erit major AD = $c-x$.

2. *Æquatio*: Cùm hypotenusæ duorum triangulorum supponantur æquales, erunt duo □□ AB † BC, h. e. $xx + aa$ = duobus □□ AD † CD h. e. $bb + cc - 2cx + xx$.

3. *Reductio.* Tollendo igitur xx & addendo $2cx$, erit $aa + 2cx = bb + cc$; & porrò utrinque tollendo aa, $2cx = bb + cc - aa$; & per $2c$ utrinq; dividendo, $x = \dfrac{bb + cc - aa}{2c}$

4. *Constructio geometrica*: Jungantur lineæ b & c h. e. CD & BE ad angulos rectos, (*n.2.*) eritq; quadratum hypotenusæ DE = $bb + cc$. Super hac hypotenusa descripto semicirculo applicetur linea AD, eritque quadratum ductæ AE = $bb + cc - aa$. Quod cùm dividendum porrò sit per $2c$, fiat, (*n.3.*) ut BF = $2c$, ad BG = $\sqrt{bb + cc - aa}$, sic BG ad BC, basin minorem quæsitam.

5. Re-


IX.
A
A
B
D
g
C
A
D
n. 2.
a
$\sqrt{bb - aa}$
F
D
B
b
XXI.
D
XXVIII.
B
N
XX
C
E
F
L
D
H
G

5. *Regula arithmetica*: Ex quadratorum
ioris & Summæ basium aggregato subtra
idratum catheti majoris, & residuum divi
Summam basium duplam, dabit basin minor
. sit AB 76, CD 57 & BE 114.

PROBLEMA V.

D*Atis duorum triangulorum rectangulo-rum super eadem basi data ex adverso stitutorum vel constituendorum cathetis, venire segmenta hypotenusarum.* E. g. sit sis communis data AB (*Fig. XVIII.*) catetus unius trianguli AD, alterius BC; æruntur segmenta hypotenusarum geometricè se secantium.

SOLUTIO.

Q Uæ si geometrica desideretur, nulla opus est analysi; siquidem super data basi communi AB erectis perpendiculariter cathetis datis AD & BC, ductæ potenusæ AC, BD sui segmenta EA, , EC, ED ipso facto exhibent. Sin hmeticè fieri debet per generalem re-am, analysis locum invenit.

r. *Denominatio*. Sit basis communis AB a, BC = b, AD = c; &, cùm inventa possint haberi cætera omnia (Nam ut ad BC, sic AF ad FE; quâ datâ habeno-

'. *Regula arithmetica*: Ex quadratorum catheti oris & Summæ basium aggregato subtrahatur dratum catheti majoris, & residuum divisum Summam basium duplam, dabit basin minorem. . sit AB 76, CD 57 & BE 114.

PROBLEMA V.

Datis duorum triangulorum rectangulorum super eadem basi data ex adverso stitutorum vel constituendorum cathetis, venire segmenta hypotenusarum. E. g. sit is communis data AB (*Fig. XVIII.*) catus unius trianguli AD, alterius BC; æruntur segmenta hypotenusarum geotricè se secantium.

SOLUTIO.

Quæ si geometrica desideretur, nulla opus est analysi; siquidem super dasi communi AB erectis perpendiculiter cathetis datis AD & BC, ductæ otenusæ AC, BD sui segmenta EA, , EC, ED ipso facto exhibent. Sin hmeticè fieri debet per generalem ream, analysis locum invenit.

'. *Denominatio*. Sit basis communis AB , BC = b, AD = c; &, cùm inventâ possint haberi cætera omnia (Nam ut ad BC, sic AF ad FE; quâ datâ habeu-

bentur etiam GD & HC, & consequ etiam DE, CE &c.) sit AF = x: Er vel HE = $a-x$.

2. *Æquatio* ex inventa bis FE.

1. Ut AB ad BC sic AF ad FE.

$$a - b - x - \frac{bx}{a}$$

2. Ut BA ad AD sic BF ad FE

$$a - c - a-x - \frac{ac-cx}{a}$$

Ergo $\frac{bx}{a} = \frac{ac-cx}{a}$.

3. *Reductio*. Multiplicando utrinq a erit $bx = ac-cx$; & addito utrinq $bx + cx = ac$; & dividendo utrinq $b+c$, $x = \frac{ac}{b+c}$

4. *Regula arithmetica*: Multiplicetur basis c munis per cathetum minorem, & productum d datur per cathetorum Summam; sic habebitur mentum baseos minus, quo dato cætera habe tur omnia. E. g. sit AB = 10, BC = 9, = 6.

PROBLEMA VI.

P*Roposito oblongo rhombum inscribere, h datis lateribus oblongi AB & BC* (Fi XI)

...) invenire quantitatem segmenti BF DE, quo resecto residuum FC vel AE ...tus rhombi desiderati.

SOLUTIO.

...t AB = *a*, BC = *b*, BF = *x*. Erit ...FC vel FA = *b*—*x*. (*hactenus Denom.*) ...o quadratum FA, quod est *bb*—2*bx* ..., = *aa*+*xx*, duobus quadratis AB & ... (*hactenus Æquatio*) &

...trahendo utrinq; *xx*, *bb*—2*bx* = *aa*; &
...endo utrinque 2*bx*, *bb* = *aa*+2*bx*; &
...trahendo *aa*, *bb*—*aa* = 2*bx*; &
...idendo per 2*b*, $\frac{bb-aa}{2b}$ = *x*. (*ha*...*nus Reductio.*)

...onstructio geometrica: Super BC (*n.* 2.) ...cripto semicirculo applicetur CD vel AB, ...que quadratum BD = *bb*—*aa*. Quod ...a dividendum sit per 2*b*, fiat, ut BE = 2*b*, BD = $\sqrt{bb-aa}$, sic BD ad BF quæsi...a, & ex latere oblongi BC (*n.*1.) resecan...n &c.

...egula arithmetica: Ex quadrato lateris majoris ...trahatur quadratum lateris minoris, & residuum ...idatur per latus majus duplicatum: quotus da... segmentum BF quæsitum. E.g. sit AB = 4, BC = 8.

PRO-

PROBLEMA VII.

D*Ato cuicunq; triangulo quadratum* [...]*ximum inscribere*, h.e. datâ alti[...]ne trianguli CD (*Fig. XX.*) & basi AB, i[...]venire portionem altitudinis CE, quâ[...]ctâ restet ED = FG.

SOLUTIO.

SIt basis AB = a; altitudo CD = b, [...] = x: erit ED vel FG = $b-x$.

Jam propter △△ ABC & FGC simil[...]dinem erunt, ut AB ad CD, sic FG ad C[...]

a — b — $b-x$ —

Ergo facta extremorum & mediorum [...] æqualia, h.e. $ax = bb - bx$; & addito[...]que bx, $ax + bx = bb$; & dividen[...] $a+b$, $x = \frac{bb}{a+b}$

Constructio: Super latere trianguli CB [...] ducto fiat CH = b, & HI = a, ut tota [...] CI sit = $a+b$. Junctis ID & ex H d[...] parallelâ HE, resecta erit portio CE de[...]rata. Est enim

ut CI ad CD sic CH ad CE

$a+b$ — b — b — x

2. cas. de effectionibus simplicibus.

Regula arithmetica: Data trianguli altitudo [...]tiplicetur quadratè, & productum dividatur [...] Summam baseos & altitudinis: quod provenit [...]

tio recidenda OE. E. g. sit CD = 10 &
= 15.

PROBLEMA VIII.

Datis in triangulo acutangulo singulis lateribus, invenire perpendiculum, à vertice in basin cadente. h. est. Datis AB, AC, (*Fig. XXI.*) quæritur AD vel BD (hac enim inventâ habetur promptè etiam illa) coll. Prop. 13. Lib. II. Euclidis.

SOLUTIO.

SI geometrica tantùm constructio hujus Problematis desideraretur, analysi opus non esset; siquidem formato ex tribus lateribus datis triangulo ABC, ex vertice A tantum esset demittenda perpendicularis AD, quæ insimul segmentum BD determinaret. Enimverò pro regula Arithmetica generali, quæ est ipsum Euclidis Corollarium, invenienda, aut si quis exercitii gratiâ perpendiculum DA per segmentum baseos BD mallet, quàm hoc per illud determinare, sic procedet analysis:

Sit AB = a, BC = b, AC = c, BD = x; erit CD = $b - x$. Erit itaque per Theor. Pythag. □ AD = $aa - xx$, & ex eadem ratione idem □ AD = $cc - bb + 2bx - xx$. Ergo

$aa - xx = cc - bb + 2bx - xx$; & addendo xx utrinque, $aa = cc - bb + 2bx$; transferendo $cc - bb$, $aa - cc + bb = 2bx$ & dividendo per $2b$, $\frac{aa - cc + bb}{2b} = x$.

Regula arithmetica: Subtrahe quadratum lateris minoris à Summa □□ baseos & lateris majoris, & residuum divisum per duplum baseos, dabit segmentum majus: Si □ lateris majoris à Summa quadratorum reliquorum subtraheretur &c. habetur segmentum minus CD.

Constructio geometrica: Super AB descripto semicirculo applicetur AC, ut □ BC = $aa - cc$; continuatâ porrò AB usque ad ℞ donec C℞ sit = CB (n. 1.) □ ℞B = $aa - cc + bb$: quod cùm dividendum sit per $2b$, fiat, ut ℞E = $2b$ ad ℞B = $\sqrt{aa - cc + bb}$, sic ℞F = ℞B ad segmentum quæsitum = BD n. I.

PROBLEMA IX.

Datis in triangulo obtusangulo tribus lateribus, invenire perpendicularem à vertice in basin continuatam cadentem.

datis AB, BC, AC, (*Fig. XXII. n. 1.*) quæritur AD vel CD (hac enim inventa habetur promptè etiam illa) Coroll. Prop. Lib. II. Euclid.

SOLUTIO.

Quod circa præcedens Problema monuimus, hîc etiam monitum esto. cætero sit hîc etiam AB = a, BC = b, = c, CD = x: Erit BD = $b + x$. Erit ; per Theor. Pythag. □ AD = $cc - xx$, eadem ratione idem □ AD = $aa - bb$ $bx - xx$. Ergo

$cc - xx = aa - bb - 2bx - xx$; & addendo xx utrinque, $cc = aa - bb - 2bx$; & nsferendo cc & $-2bx$, $2bx = aa - cc$ b, & dividendo per $2b$, $x = \frac{aa - cc - bb}{2b}$.

Regula arithmetica: Subtrahe ex quadrato majoris lateris Summam quadratorum baseos & lateris ioris; & residuum divisum per basin duplam ir ejus continuationem usque ad perpendiculum.

Constructio geometrica ex Æquatione recta: Super AB (*n.* 2.) descripto semicirculo applicetur AC, eritque □ ductæ CB $aa - cc$. Super hac alii semicirculo describatur applicetur BE = b, eritque quadratum ctæ CE = $aa - cc - bb$. Quod cùm dividendum sit per $2b$, fiat, ut CF = $2b$ ad E $\sqrt{aa - cc - bb}$, sic CE ad CD segmentum æsitum. n. 1.

 PRO-

PROBLEMA X.

Archimedi adſcribi ſolitum egregium.

SEmicirculi dati diametro AB (Fig. XI n. 1.) *utcunq; diviſâ in L, & ex in ctâ perpendiculari LX, ſuper ſegmentis tem LA & LB deſcriptis aliis duobus ſe circulis, quorum ſemidiametri DL & L aquè data ſint ac ſemidiameter majoris micirculi CB; invenire radios FM & circellorum ita deſcribendorum, ut tang perpendicularem LX, cavitatem ſemici majoris; & convexitates ſemicirculorum norum.*

Solutio.

I. Pro radio FM.

I.

D*Enominatio.* Sit CB = *a*, EB = *b* CE = *a*—*b*; pro qua interim brevi ergo poteſt poni *c*. Jam ſit FM vel F vel FK = *x*: Ergo EF erit = *b* † *x*, & C (ſubtractâ FK ex CK) = *a*—*x*. Dabun ergo nunc ſaltem nomine tenus tria late in △ CFE, ut ſecundùm Probl. VIII. p ſit determinari ſegmentum baſeos G pro quo interim ponemus *y*; eritque p CG = *c*—*y*.

2. II

.. *Pro Æquatione.* Si quadratum GE =
subtrahatur ex □ EF $= bb + 2bx + xx$,
ebitur quadratum perpendiculi FG =
$+ 2bx + xx - yy$; &, si □ CG $= cc - 2cy$
y. subtrahatur ex □ CF $= aa - 2ax + xx$,
ebitur idem □ perpendiculi FG $= aa$
$2ax + xx - cc + 2cy - yy$. Ergo: $bb + 2bx$
$x - yy = aa - 2ax + xx - cc + 2cy - yy$.
y. *Reductio*; Et sublatis utrinque quan-
tibus xx & yy, $bb + 2bx = aa - 2ax - cc$
cy; & addendo $2ax$ & cc, tollendo ve-
aa, ex utraque parte, $bb + 2bx + 2ax$
$c - aa = 2cy$; & dividendo per $2c$,

$$+ 2bx + 2ax + cc - aa \over 2c = y.$$

idem y sive EG est = EL−MF h. e. $b-x$.
go $\dfrac{bb + 2bx + 2ax + cc - aa}{2c} = b - x$;
e est nova & principalior æquatio: Et
ltiplicando utrinq; per $2c$ (nova Re-
ctio)
$bb + 2bx + 2ax + cc - aa = 2bc - 2cx$;
addendo $2cx$, reliquasque transponen-
; $2bx + 2cx + 2ax = aa - bb - cc + 2bc$;
dividendo per $2a + 2b + 2c$,

$$x = \frac{aa - bb - cc + 2bc}{2a + 2b + 2c}.$$

Constructio geometrica hujus 1. casus: De-
rminata (*n. 2.*) quantitas $2bc$ addatur in

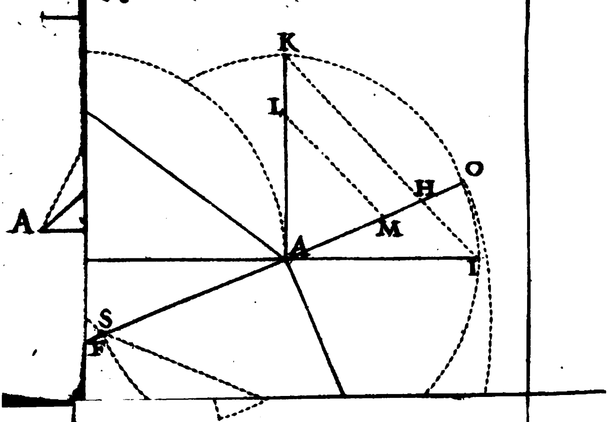
unam Summam cum quantitate aa, uti factu n. 3. initio. Deinde ex hac Summa subtrahatur successivè quantitates bb & cc, & prodibit (eod. n. 3.) FH, cujus □ = est aa † 2 — bb — cc: quod cùm dividendum sit per † 2b † 2c, fiat portò (eod. n. 3.) ut FI =
† 2b † 2c ad FH = V aa † 2bc — bb — sic FH ad FM, radium circelli describen quæsitum. Inventa hæc quantitas FM natur ex L in G (n. 1.) & ex G erigat perpendicularis, quæ resecta intervallo (quod habetur, si ex CB vel CK resecet FK = FM) vel ex E intervallo EF (q componitur ex radiis EN & FN) dat trum describendi circelli.

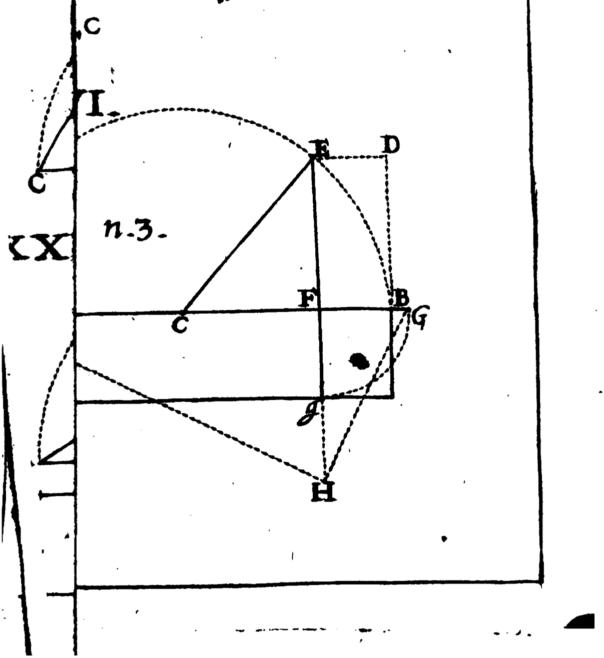
Regula arithmetica: Addatur duplum rect lum CEB quadrato semid. maximæ CB, Summa subtrahatur aggregatum □□ CE residuum dividatur per Summam omnium diametrorum (AB, AL & LB) h. e. per d maximæ AB; & proveniet radius EM &c. pli loco sit a = 12, b = 4; erit c = 8, & niet x = 2⅔.

II. Pro radio Vy, ope △ obtusanguli DV

1.

DEnominatio. CA = a ut suprà, iterum posito pro quæsito Vy vel erit CV = a — x DL vel DR = b & c sequenter DV = b † x; DC verò =


K
L
O
H
M
A
I
S
F
A


C
VI.
C
E
D
n.3.
IX
F
B
G
C
g
H

qua interim brevitatis causâ ponemus
Dabuntur igitur nunc saltem nomine-
ius in △ CVD tria latera, ut secundùm
oblema IX. possit determinari segmen-
m CW, pro quo interim ponemus y:
tq; DW = $c + y$.

2. *Pro Æquatione.* Si □ CW = yy sub-
hatur è □ CV = $aa - 2ax + xx$, habe-
ur □ perpendiculi VW, $aa - 2ax + xx$
yy; & si □ DW = $cc + 2cy + yy$ sub-
hatur ex □ DV = $bb + 2bx + xx$, ha-
bitur idem □ perpendiculi VW = $bb + 2bx$
$xx - cc - 2cy - yy$. Ergo
$aa - 2ax + xx - yy = bb + 2bx + xx - cc$
$2cy - yy$.

3. *Reductio*: Ergo sublatis utrinq; xx & yy
$aa - 2ax = bb + 2bx - cc - 2cy$; & adden-
o $2cy$ & $2ax$, $aa + 2cy = bb + 2ax + 2bx$
$- cc$; & subtrahendo aa, $2cy = bb - aa + 2ax$
$2bx - cc$, & dividendo per $2c$,
$$y = \frac{bb - aa + 2ax + 2bx - cc}{2c}.$$
ed eidem y sive CW si addatur DC = c
habebitur
$$DW = \frac{bb - aa + 2ax + 2bx - cc}{2c} + c. \text{ h. e.}$$
l eandem denominationem reducendo hoc c
$$\frac{bb - aa + 2ax\ 2bx + cc}{2c} = DW.$$

 Sed

pro catheto majore, & major AD pro catheto minore.

SOLUTIO.

I.

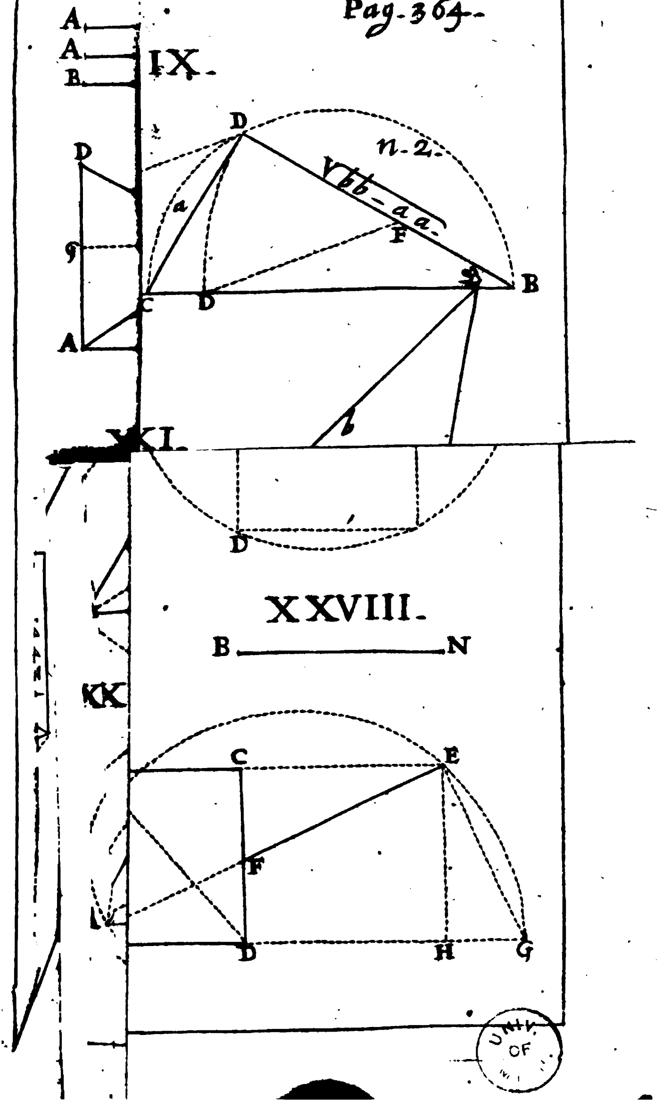
DEnominatio. Sit AB $= a$, CD $= b$, Summa BE $= c$; dicatur basis minor BC $= x$; erit major AD $= c - x$.

2. *Æquatio*: Cùm hypotenusæ duorum triangulorum supponantur æquales, erunt duo □□ AB + BC, h. e. $xx + aa =$ duobus □□ AD + CD h. e. $bb + cc - 2cx + xx$.

3. *Reductio*. Tollendo igitur xx & addendo $2cx$, erit $aa + 2cx = bb + cc$; & porrò utrinque tollendo aa, $2cx = bb + cc - aa$; & per $2c$ utrinq; dividendo, $x = \frac{bb + cc - aa}{2c}$.

4. *Constructio geometrica*: Jungantur lineæ b & c h. e. CD & BE ad angulos rectos, (*n.* 2.) eritq; quadratum hypotenusæ DE $= bb + cc$. Super hac hypotenusa descripto semicirculo applicetur linea AD, eritque quadratum ductæ AE $= bb + cc - aa$. Quod cùm dividendum porrò sit per $2c$, fiat, (*n.* 3.) ut BF $= 2c$, ad BG $= \sqrt{bb + cc - aa}$, sic BG ad BC, basin minorem quæsitam.

5. Re-


IX.
A
A
B
D
g
A
C
D
n. 2.
a
$\sqrt{bb-aa}$
F
D
B
b
XI.
D
XXVIII.
B
N
KK
C
E
F
I
D
H
G

5. *Regula arithmetica:* Ex quadratorum minoris & Summæ basium aggregato subtra quadratum catheti majoris, & residuum divi per Summam basium duplam, dabit basin minor E. g. sit AB 76, CD 57 & BE 114.

PROBLEMA V.

D*Atis duorum triangulorum rectangulorum super eadem basi data ex adverso constitutorum vel constituendorum cathetis, invenire segmenta hypotenusarum.* E. g. sit basis communis data AB (*Fig. XVIII.*) cathetus unius trianguli AD, alterius BC; quæruntur segmenta hypotenusarum geometricè se secantium.

SOLUTIO.

QUæ si geometrica desideretur, nullâ opus est analysi; siquidem super data basi communi AB erectis perpendiculariter cathetis datis AD & BC, ductæ hypotenusæ AC, BD sui segmenta EA, EB, EC, ED ipso facto exhibent. Sin arithmeticè fieri debet per generalem regulam, analysis locum invenit.

1. *Denominatio.* Sit basis communis AB = *a*, BC = *b*, AD = *c*; &, cùm inventâ AF possint haberi cætera omnia (Nam ut AB ad BC, sic AF ad FE; quâ datâ habe-

quoque BE, data (Nam quadratis datis etiam latera dantur geometricè:) quæruntur latera △ rectanguli quod habet has conditiones; aut rectiùs, quæritur latus unum, e.g. minus AC, quo reperto alterum, sive majus, non potest ampliùs latere.

SOLUTIO.

Sit □ hypotenusæ datæ $= aa$, & quadratum, quo differunt duo reliqua $= bb$. Sit latus minus $= x$, ejusq; □ $= xx$. Ergo majus erit $xx + bb$. Horum Summa cùm æquetur □ hypotenusæ, erunt

$2xx + bb = aa$; & subtrahendo bb,

$2xx = aa - bb$; & dividendo per 2

$xx = \frac{aa-bb}{2}$. Ergo

$$x = \sqrt{\frac{aa-bb}{2}}.$$

Constructio geometrica: Super BC descripto semicirculo, & applicatâ BE, erit □ EC $= aa - bb$; & super EC descripto alio semicirculo in duos quadrantes diviso, □ DC erit $\frac{aa-bb}{2}$, adeoque DC. $= \sqrt{\frac{aa-bb}{2}}$, sive latus quæsitum: id quod translatum in alterum semicirculum super BC descriptum, nempe ex

ex C in A, simul dat alterum latus AB totumque △ desideratum.

Regula arithmetica: Ex quadrato hypotenusæ subtrahatur data differentia; & è residui dimidio extracta radix quadrata dat latus △ quæsiti minus.

PROBLEMA III.

D*Ato △ æquilatero ABC* (Fig. XXVI. n. 1.) *quæritur semidiameter ac centrũ circumscribendi circuli*. h. e. quæritur lat. BD hexagoni eidem circulo inscribendi. Quòd si enim rem concipiamus tanquam jam factam; manifestum est, latus hexagoni BD super latere trigoni AB cadere perpendiculariter, utpote faciens angulum in semicirculo, ductâq; adeò hypotenusâ DA bifariam divisâ obtineri centrum E desideratum.

SOLUTIO.

SIt AB latus trianguli = a, BD = x, erit AD = $2x$. Cùm igitur quadrato BD, h. e. xx, ex quadrato AD h. e. $4xx$ subtracto, restet quadratum AB, $3xx$, habebitur æquatio:

$$3xx = aa;\ \text{\& dividendo per } 3$$

$$xx = \frac{aa}{3}.\ \text{Ergo}$$

$$x = \sqrt{\frac{aa}{3}}$$

Constructio geometrica: Productâ AB (n. 2.) in F

in F tertiâ sui parte. inter BF & BA inventæ mediæ proportionalis BD quadratum erit $\frac{1}{3}aa$ s. $\frac{aa}{3}$, adeoque ipsa linea BD $= \sqrt{\frac{aa}{3}}$

Ergo hypotenusâ DA in E bifariam divisâ, vel etiam intervallo BD ex B & A intersectione factâ, habebitur centrum desideratum.

Regula arithmetica: Quadratum lateris dati dividatur in tres partes æquales, & radix quadrata ex una parte tertia dabit semidiametrum AE vel BE quæsitam, quarum intersectione centrum haberi potest.

PROBLEMA IV.

D*Atâ, pro parallelogrammo rectangulo, diagonio, aut pro* △ *rectangulo hypotenusâ, & laterum proportione, latera seorsim invenire & parallelogrammum vel* △ *construere.* Sit e.g. data diagonalis AB (*Fig. XXVII. n. 1.*) ratio laterum data ut AD ad DE: quæruntur ipsa latera.

SOLUTIO.

SIt AB $= a$, ratio AD ad DE, ut b ad c; ponatur latus minus $= x$, erit majus $\frac{cx}{b}$.

Pro Æquatione □□ Laterum $xx + \frac{ccxx}{bb}$ $= aa$ □ AB; & utrinq; multiplic. per bb, $bbxx$

$bbxx + ccxx = aabb$; & dividendo per $bb + cc$, $xx = \frac{aabb}{bb+cc}$. Ergo

$$x = \sqrt{\frac{aabb}{bb+cc}}$$ h. e. extractis radicibus quoad fieri potest,

$$x = \frac{ab}{\sqrt{bb+cc}}$$

Alia Solutio.

POnatur pro nomine datæ rationis, e, ita, ut assumptâ quacunque lineâ (v. g. AD) pro unitate, valor ipsius e quoque expressus sit lineâ rectâ, quæ sit æqualis e. g. superiori DE. Quoniam igitur latus minus ponitur x, majus erit ex, adeoq;

$xx + eexx = aa$; h. e. dividendo per $1 + ee$,

$$xx = \frac{aa}{1+ee}, \&$$

$$x = \sqrt{\frac{aa}{1+ee}}$$ h. e.

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+ee}}$$

Constructio geometrica: Reductâ æquatione ultimâ superiore ad hanc illationem, ut $\sqrt{bb+cc}$ ad b, sic a ad x, statuantur (*n.* 2.)

AD ac

AD ac DE ad angulos rectos, eritque $AE = \sqrt{bb + cc}$, continuatisque AE, & AD fiat, ut AE ad AD, sic AB ad AC, latus minus quæsitum. Ducta ergo BC quæ minus latus AC determinat, erit latus majus, adeoque △ ABC jam formatum & in rectangulum quoque ACBE facilè complendum. In altera solutione æquatio ultima reipsa prorsus convenit cum præcedente (parit enim hanc illationem, ut $\sqrt{1 + ee}$ ad 1, sic a ad x, in qua 1. est $= b$, & $ee = cc$ per supposita) adeoq; constructio est eadem.

Regula arithmetica per hanc alteram æquationem sub formula penultima commodiùs exprimitur h.m: Divide □ diagonii per □ nominis rationis unitate auctum, & ex residuo extracta radix est latus minus quæsitum.

PROBLEMA V.

(Quod apud Pappum Alexandrinum reperitur, & Cartesio p. 83. Geom. æquationem Quadratoquadraticam affectam, & p. 84. monitum notabile peperit.)

D*Atis quadrato AD* (Fig. XXVIII.) *& rectâ lineâ BN, oporteat producere latus AC usq; ad E, itaut EF ducta ab E versus B sit æqualis ipsi BN.*

Patet, si cogitatur per puncta B & E transire semicirculus; commodissimè inquiri lineam DG; ut habeatur diameter

BG;

BG; super qua descripto postea semicirculo, ad satisfaciendum Problemati non opus erit aliâ porrò operatione, quàm productione lateris A C, donec occurrat præscriptæ peripheriæ.

SOLUTIO.

(Prout à Fr. Schootenio p. 316. Comment. in Geom. Cartes. inventa est, à nobis paulò distinctius exponenda.)

I.

Denominatio. Ponatur B D vel D C = a, B N vel F E = c, B E = y & D G = x; erit E H perpend. = a, E G verò = B E s. y, (quia △ EHG simile est △ BDE, per n. 3. Schol. II. Prop. XXXIV. Lib. I. Mathes. Enucl. & B D in illo = EH in hoc) & B G = $a + x$, B E = $y + c$; B H verò denominabitur, si fiat (propter △△ BFD & BEH similitudinem)

ut B F ad B D sic B E ad B H

$$y \;—\; a \;—\; y+c \;—\; \frac{ay+ac}{y}$$

Habebitur etiam HG = $a + x - \frac{ay+ac}{y}$,

h. e. reductis omnibus ad eandem denominationem, $\frac{ay+xy-ay-ac}{y}$. h. e. $\frac{xy-ac}{y}$.

Denominatis ita lineis omnibus, quibus opus esse queat, inveniendæ sunt duæ æquationes,

tiones, quia duo sunt incognita assumpta, nempe x & y.

2. *Pro æquatione prima ejusq; reductione.* Propter △△ BGE & BEH similitudinem, ut BG ad GE, sic BE ad EH

$a + x - y - y + c - a$: Ergo factum extremorum = facto mediorum, h.e. $yy + yc = aa + ax$, & sublato utrinq; yc, $yy = -yc + aa + ax$.

3. *Pro secunda æquatione ejusq; reductione.* Cùm BH, HE & HG sint continuè

$\frac{ay + ac}{y} - a - \frac{xy - ac}{y}$

proportionales, factum extremorum erit = quadrato medii, h. e.

$\frac{axyy + acxy - aacy - aacc}{yy} = aa$; & multiplicando utrinque per yy, ac dividendo per a

$xyy + cxy - acy - acc = ayy$; & sublato ayy cæterisque translatis, $xyy - ayy = acy - cxy + acc$; & dividendo per $x - a$, $yy = \frac{acy - cxy + acc}{x - a}$; h. e. per $x - a$ verà dividendo, quantum fieri potest,

$yy = -cy + \frac{acc}{x - a}$

4. *Comparatio duarum ita reductarum æquationum, quæ novam ac tertiam gignat, in qua*

in qua jam solùm incognita quantitas superest; nimirum

$-xy + aa + ax = -cy + \frac{acc}{x-a}$, & addito cy utrinque, $aa + ax = \frac{acc}{x-a}$; & multiplicando per $x-a$, $aax + axx - a^3 - aax = acc$, hoc est, $axx - a^3 = acc$; & dividendo utrinque per a, $xx - aa = cc$; & addendo aa, $xx = aa + cc$. Ergo $x = \sqrt{aa + cc}$.

5. *Constructio geometrica,* quæ est illa ipsa quam Pappus apud Cartesium præscribit. Nimirum, prolongato quadrati latere BA in N, ut BN sit = datæ rectæ, cùm BA sit = a, & BN = c, erit hypotenusa DN = $\sqrt{aa+cc}$ = x. Factâ igitur DG = DN, & super totâ BG descripto semicirculo, si prolongetur AC, donec peripheriæ occurat in E, factum erit, quod desiderabatur.

PROBLEMA VI.

(Quod habet Schootenius in Comment. p. m. 150. & seqq.)

D*Atâ rectâ lineâ terminatâ AB, ex terminis ejus A & B* (Fig. XXIX.) *duas rectas lineas AC & BC inflectere, quæ contineant angulum ACB æqualem dato D; &*

 qua-

quarum quadrata habeant ad triangulum ACB rationem datam, ut 4d ad a.

Determinandum nimirum est punctum C, quod præstant duæ lineæ AH & HC, vel EH & HC, puncto E assumpto medio in linea AB. Quantitates igitur incognitæ hîc duæ erunt, HE & HC, & consequenter æquationes duæ inveniendæ in solutione; quarum alteram ipsa proportio in quæstione data, suppeditat, alteram triangula AIC & GFD similia, quæ angulos æquales repræsentant.

SOLUTIO.

Denominatio. Sit AE, dimidia AB, ∞ *a*, HE ∞ *x* & HC ∞ *y*; erit igitur AH ∞ $a-x$ & HB ∞ $a+x$: Ex quibus denominatio quadratorum AC & BC facilè habetur; illud nempe $aa-2ax+xx+yy$, hoc, $aa+2ax+xx+yy$, ita ut Summa horum □□ fit $2aa+2xx+2yy$. Triangulum ACB verò erit ∞ ay: & cùm △△ GFD & AIC similia, & illius quidem latera FD & FG arbitraria sint, ut pro FD possimus ponere *b* & pro FG, *c*, hujus verò latera AI & IC determinentur per similitudinem △△ ABI & HCB, utpote

utpote rectangulorum & angulum B communem habentium; habebuntur illa inferendo,

ut hypoten. BC ad hypot. AB, sic perpendic. CH ad perpendic. AI, h. e. ut $\sqrt{aa + 2ax + xx + yy}$ pro qua ponatur interim e, ad $2a$, sic y ad $\frac{2ay}{e}$.

Et ut hypot. BC ad hypot. AB, sic basis HB ad basin BI, h. e.

$$e - 2a - a + x - \frac{2aa + 2ax}{e}.$$

E qua subtracta BC = e, restat CI = $\frac{2aa + 2ax - ee}{e}$.

2. *Pro aequatione prima*, vi problematis est ut $4d$ ad a, sic $2aa + 2xx + 2yy$ ad ay. Ergo factum extremorum = facto mediorum h. e. $4ady = 2a^3 + 2axx + 2ayy$.

3. *Pro aequatione altera*, cùm sit

ut DF ad FG sic CI ad AI

$$b - c - \frac{2aa + 2ax - ee}{e} - \frac{2ay}{e},$$

erit factum extremorum iterum = facto mediorum, h. e. $\frac{2ayb}{e} = \frac{2aac + 2acx - cee}{e}$;

& multiplicando utrobiq; per e

$2ayb = 2aac + 2acx - cee$; quæ est secunda æquatio.

4. *Reductio utriusq; æquationis.*

Prior erat: $4ady = 2a^3 + 2axx + 2ayy$. Ergo dividendo per $2a$, $2dy = aa + xx + yy$; & subtrahendo $aa + yy$, $2dy - aa - yy = xx$.

Posterior erat: $2ayb = 2aac + 2acx - eec$, h. e. substituendo rursum valorem ee, qui fuerat $aa + 2ax + xx + yy$

$2ayb = 2aac + 2acx - aac - 2acx - cxx - cyy$, h. e. $2ayb = aac - cxx - cyy$, & transponendo $cxx = aac - 2ayb - cyy$; & dividendo per c, $xx = \frac{aac - 2ayb - cyy}{c}$

f. $aa - yy - \frac{2ayb}{c}$ vel (ponendo $2f$ pro $\frac{2ab}{c}$) $xx = aa - yy - 2fy$.

Habemus igitur valorem xx bis expressum, sed per quantitates ex parte incognitas, cùm y utrobique habeatur. Nova igitur nunc instituenda valoris utriusq; comparatio, quâ hæc nova suppeditabitur, numero quidem

5. *Tertia æquatio*: in qua una solùm incognitarum quantitatum occurrat;

$2dy - aa - yy = aa - yy - 2fy$; & addendo utrobiq; cum yy tum aa,

$2dy = 2aa - 2fy$, sive dividendo per 2

$dy = aa - fy$; & transponendo fy

$dy + fy = aa$; & dividendo per $d + f$

$y = \frac{aa}{d+f}$, valor quantitatis y per me-

ra cognita.

Hic verò in antecedentium æquationum una, e.g. hac, $xx = 2dy - aa - yy$, substitutus pro y, & ejus quadratum pro yy, dabunt

$xx = \frac{2daa}{d+f} - aa - \frac{a^4}{dd + 2df + ff}$; h.e. reductis omnibus ad eandem denominationem, $xx = \frac{aadd - aaff - a^4}{dd + 2df + ff}$; &

$$x = \sqrt{\frac{aadd - aaff - a^4}{dd + 2df + ff}}.$$

6. *Constructio geometrica*, quam habet Schootenius p. 153: Facto angulo KAB (*n.2. Fig. XXIX.*) æquali dato D, erigatur ex A ipsi KA perpendicularis AL, occurrens perpendiculari EM in L; centroque L, intervallo rectæ datæ d, circulus describatur secans KA & EL, productas, in K & M. De-

 inde,

inde, assumptâ $EN = KA$, jungatur MA, & ex N agatur huic parallela NH, quæ ipsi AB occurrat in H. Postea, descripto ex L, intervallo LA, circuli segmento ACB, ducatur ex H ipsi AB perpendicularis HG, occurrens circumferentiæ in C, ac jungantur AC, CB.

NB. Elegantis hujus constructionis ratio, quam autor dissimulavit, in gratiam tyronum hîc evolvenda est: 1. Igitur æquationem ultimam (extractâ radice tam in numeratore, quàm in denominatore, quoad ejus fieri potuit) ad hanc reduxit: $x = \frac{a}{d+f}$ multipl. per $\sqrt{dd-ff-aa}$, ut hoc pacto ad hanc illationem reduceretur constructio: ut $d+f$ ad a, sic $\sqrt{dd-ff-aa}$ ad x. 2. Angulum KAE fecit dato D æqualem & KAL rectum, ut ex L descripto segmento circuli angulus inscriptus dato pariter æqualis fieret, juxta 32. Lib. III. Euclidis. 3. EL hoc ipso expressit quantitatem f, cùm propter similitudinem $\Delta\Delta$ KQA s. GFD (n. 1.) & AEL [Nam angulus LAE & AKO æquales sunt, quia cum eodem tertio KAO uterque rectum facit] sit

ut KO ad OA, sic AE ad EL h. e. f.
c — b — a — $\frac{ab}{c}$

4. Factis jam LM & $LK = d$, habebatur $EM = d+f$, & $AK = \sqrt{dd-ff-aa}$ (nam $\square$ AL est $= aa+ff$ & hoc subtracto ex $\square$

LK=

LK = dd, □ AK, restat = $dd - ax - ff$.)

5. Nihil ergo nunc supererat pro construenda superiore ultima æquatione, quàm ut EN fieret = AK, & duceretur HN parallela cum AM; sic enim habebatur illatio tota:

ut EM ad EA, sic EN ad EH

$\frac{dff}{a} - a - \sqrt{dd - ff - aa}$ ad x. q.e.f.

Determinato enim puncto H, erecta inde perpendicularis HC, in segmento jam descripto punctum C definit, quod quæsito satisfaciat.

PROBLEMA VII.

D*atis quatuor lateribus quadranguli circulo inscribendi, invenire diagonios eorumque segmenta, ipsumque adeò quadrangulum construere & circulo inscribere.* Ut si v.g. latera data essent AB, BC, CD, DA (*Fig. XXX. n. 1.*) quæ in qudrangulum circulo inscriptum jam conjugata fingimus, diagomis AC & BD quoq; jam ductis; (*n. 3.*) quærerentur inprimis segmenta diagoniorum A*e*, B*e* &c. quibus datis constructio parata est.

SOLUTIO.

I.

D*Enominatio.* Sit AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, A*e* = x [Nam hoc solo segmento invento, reliqua non la-

tebant, ut ex progressu patebit.] Q
igitur anguli verticales ad *e* sint æqu
& anguli in eodem segmento BCA, BD
item DAC, DBC &c. pariter æqua
erunt triangula A*e*D & B*e*C, itemq
A*e*B & C*e*D, similia; Sequetur ergo

1. Ut DA ad A*e* sic CB ad B*e*

$d \quad — \quad x \quad — \quad b \quad — \quad \frac{bx}{d}$

2. Ut AB ad B*e* sic CD ad C*e*

$a \quad — \quad \frac{bx}{d} \quad — \quad c \quad — \quad \frac{bc}{ad}$

3. Ut AB ad A*e* sic CD ad D*e*

$a \quad — \quad x \quad — \quad c \quad — \quad \frac{cx}{a}$

Ergo totus Diagonius AC erit $= x +$ [illegible]

& BD $= \frac{bx}{d} + \frac{cx}{a}$.

2. *Æquatio.* Jam verò per Prop. XL[illegible]
Lib. I Mathes. Enucl. Rectangulum ex [illegible]
goniis est æquale duobus rectangulis op[illegible]
sitorum laterum.

D

Diag. AC, $x + \frac{bcx}{ad}$

Diag. BD, $\frac{bx}{d} + \frac{cx}{d}$

$$\frac{cxx}{a} + \frac{bccxx}{aad}$$

$$\frac{bxx}{a} + \frac{bbcxx}{add}$$

Ergo

□ Diagoniorum $\frac{bxx}{d} + \frac{cxx}{a} + \frac{bbcxx}{add} + \frac{bccxx}{aad}$

$= ac + bd.$

3. *Reductio* h.e. sumendo *a* pro unitate

$$\frac{bxx}{d} + cxx + \frac{bbcxx}{dd} + \frac{bccxx}{d} = c + bd;$$

h. e. reductis ad eandem denominationem sinistris

$$\frac{bdxx + cddxx + bbcxx + bccdxx}{dd} = c + bd;$$

& multiplicando per *dd* utrobiq;

$$bdxx + cddxx + bbcxx + bccdxx = cdd + bd^3;$$

& dividendo ubiq; per d

$$bxx + cdxx + \frac{bbcxx}{d} + bccxx = cd + bdd;$$

& jam dividendo utrinq; per $b + cd + \frac{bbc}{d} + bcc$

$$xx = \frac{cd + bdd}{b + cd + \frac{bbc}{d} + bcc};$$ h. e. in casu præsenti, ubi forte fortunâ b est $= a$,

$$xx = \frac{cd + dd}{1 + cd + \frac{c}{d} + cc}.$$

Ergo $x = \sqrt{\frac{cd + bdd}{b + cd + \frac{bbc}{d} + bcc}}$

vel in casu nostro

$$x = \sqrt{\frac{cd + dd}{1 + cd + \frac{c}{d} + cc}}.$$

4. *Constructio Geometrica*, quæ, supponendo a (& in præsenti casu etiam b) pro unitate, determinare debet 1. quantitates cd, $\frac{c}{d}$, cc, harumque aggregatum cum unitate;

2. aggregatum ex *cd* & *dd*. 3. hanc per illam dividere, & 4. ex quoto radicem extrahere, vel etiam radices priùs ex utraque quantitate extrahere, & has demum per invicem dividere: quæ omnia quidem separatim totidem diagrammatibus expediri possent, sed elegantiùs sequenti, aliove simili, modo connectentur: 1. Junguntur AD & DC (*n*. 2.) in unam lineam & super hac descripto semicirculo erigatur perpendicularis DE; eritque ducta AE $= \sqrt{cd + dd}$. 2. Facto angulo CAG pro lubitu, fiat AF = AB, ductæque DF agatur parallela CG; sic FG erit $= \frac{c}{d}$. Quod si 3. in angulo verticali fiat AH = CD, ducta HI parallela cum DF abscindet AI = *cd*. 4. In erecta AK = AB, si sumatur AL = AH vel CD, ductæque KH agatur parallela LM, habebitur AM = *cc*. 5. Prolongatis AG in N & AH in O, ut GN sit = AI + AM & AO = AB vel AK, & super tota NO descripto semicirculo, erecta perpendicularis AP erit $= \sqrt{1 + cd + \frac{c}{d} + cc}$, atque adeò 6. Si AQ facta fuerit = AE & AR = AF vel AB, ductæque PQ acta ex R parallela RS; erit AS = *x*, h. e. segmentum quæsitum A*e*, Diagonii AC; quo dato, vi illationis 1. in Denom. superiùs præmissæ, ducendo DS &, facta DT = BC, huic parallelam TV; habebitur alterum quoque segmentum B*e* = SV & horum intersectione su-

ne super linea AB (*n.* 3.) punctum *e*, per quod agendi veniunt Diagonii à datis lateribus reliquis facilè terminandi, ut inde quadrilaterum desideratum ABCD proveniat, circulo suo juxta Conf. 6. Defin. VIII. Mathes. Enucl. facilè circumscribendum.

NB. *Nisi tyronibus consulere nobis hîc propositum esset, poterat hujus quoq; constructionis artificium breviùs & occultiùs hoc modo proponi:* Inter AD & DC statuatur media proportionalis DE, & agatur AE. Deinde facto angulo quocunque CAG, fiat AF = AB & hoc intervallo circulus FROK, ductæque DF agatur parallela CG. Porrò in opposito verticali angulo, factâ AH = CD, ducatur HI parallela cum DF, & erectâ perpendiculari AK, indeque abscissâ AL = AH, fiat LM parallela cum HK. Mox prolongatâ AH in O, & GN factâ = AI + AM, inter AO & AN statuatur media proportionalis AP, circulum occultum secans in R: tandemq; factâ AQ = AE, si RS agatur parallela cum QP, habebitur AS valor ipsius *x* quæsitus &c.

III. EXEMPLA
quædam
Æquationum quadraticarum affectarum.

PRO-

PROBLEMA I.

Datis pro triangulo rectangulo ABC differentiis lateris minoris à majori, & majoris ab hypotenusa, invenire latera seorsim ac triangulum formare. E.g. datâ rectâ DB (*Fig. XXXI.*) pro differentia catheti & baseos, CE verò pro differentia baseos & hypotenusæ, quæritur cathetus AC; quo invento habetur etiam per supposita basis AB & hypotenusa BC.

SOLUTIO.

Sit differentia DB $= a$, CE $= b$; ponatur pro catheto x, erit basis ipso major $= x + a$, & hypotenusa $= x + a + b$. Ergo vi Theorematis Pythagorici,

$$2xx + 2ax + aa = xx + 2ax + 2bx + aa + 2ab + bb;$$

& subtrahendo utrinq; $xx + 2ax + aa$

$$xx = 2bx + 2ab + bb.$$

Quare per Cas. 1. Quadraticarum affectarum $x = b + \sqrt{2ab + 2bb}$.

Constructio: Inter AH $= 2b$ & AI $= a$ inveniatur media proportionalis AK (*n. 2. Fig. XXXI.*) factisque tam AF quàm AG $= b$, hypotenusa KF statuatur ab A in L, & hypotenusæ GL resecetur æqualis GC; sic habe-

habebitur cathetus AC trianguli quæsiti, & accedente augmento DB basis quoque AB: ab hac verò ducta hypotenusa BC deprehendetur differre excessu postulato CE.

Regula arithmetica: Junge geminum factum differentiarum in se invicem quadrato gemino differentiæ baseos ab hypotenusa; & extracta hujus Summæ radix si addatur differentiæ modò dictæ, habebitur cathetus desideratus. Sit e.g. utraque differentia tam CE quàm DB = 10.

PROBLEMA II.

D*Atis pro* Δ *rectangulo hypotenusâ & laterum Summâ, ipsa latera seorsim invenire.* E. g. si data esset hypotenusa BC (*Fig. XXXII.*) & laterum Summa CAB, quærantur latera AB & AC seorsim pro formando triangulo.

SOLUTIO.

SIt hypotenusa BC = a, laterum Summa = b. Sit unum latus, e.g. AB, = x, erit alterum AC = $b-x$. Ergo

$2xx - 2bx + bb = aa$; & addendo $2bx$, tollendo verò bb, $2xx = 2bx + aa - bb$; & dividendo per 2, $xx = bx + \frac{aa-bb}{2}$.

Ergo

Ergo juxta cas. 1. Quadraticarum affectarum.

$$x = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + \tfrac{aa - bb}{2}}$$

$$\text{h.e. } \tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{4}bb}$$

$$\text{vel } \tfrac{1}{2}b - \sqrt{\tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{4}bb}.$$

Constructio geometrica: Super BD = BC s. A descripto semicirculo applicentur æquales lineæ BE ac DE, & super BE descripto alii semicirculo applicetur BF = ½ b, paulo ulterius prolonganda. Tandem si semicircellus alius intervallo EF decircinetur, erit tota AB radix vera sive latus quæsitum, GB verò radix falsa &c.

Regula arithmetica: Ex dimidio quadrato hypotenusæ subtrahatur pars quarta quadrati datæ Summæ, & ex residuo extracta radix, si addatur Summa dimidia, dabit unum trianguli latus; quod subtractum ex data Summa manifestabit etiam alterum. Sit e. g. BC 20 & Summa laterum 28.

PROBLEMA III.

D*Atis pro eodem* △ *iterum hypotenusâ, ut suprà, & laterum differentia* DB (Fig. XXXIII.) *latera seorsim invenire.*

SOLUTIO.

SIt minus latus x, differentia laterum = b; erit majus latus $x + b$. Sit hypotenusa = a. Ergo: $2xx + 2bx + bb = aa$; & col-

& tollendo $2bx + bb$, $2xx = aa - 2bx - bb$;
& dividendo per 2, $xx = -bx + \frac{aa - bb}{2}$.

Ergo per Cas. 2. $x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{aa - bb}{2}}$

hoc est $-\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}bb}$.

Constructio geometrica: Super BD = BC sive *a*, descripto semicirculo applicentur æquales lineæ BC ac DC, & super DC descripto alii semicirculo applicetur DF = $\frac{1}{2}b$, eodemque intervallo si resecetur FA, & ducta FC, residua AC erit latus minus quæsitum &c.

Regula arithmetica: Ex dimidio quadrato hypotenusæ subtrahatur quadratum dimidiæ differentiæ, & ex residuo extractæ radici si dematur dimidia differentia, habebitur latus desiderati trianguli minus, eique addendo datam differentiam, etiam majus. Sit e.g. hypotenusa 20, & differentia laterum 4.

PROBLEMA IV.

D*Atâ areâ parallelogrammi rectanguli, & laterum differentiâ, invenire ipsa latera.* E.g. Si area sit = quadrato lineæ datæ DF, & differentia laterum ED, (*Fig. XXXIV.*) quærantur latera rectanguli.

SOLU-

SOLUTIO.

SIt area data = aa, laterum differentia = b, latus minus x; erit majus $x + b$. Ergo area $xx + bx = aa$; & subtrahendo bx,

$$xx = -bx + aa.\ \text{Ergo juxta Caf. 2.}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + aa}.$$

Constructio geometrica: Jungantur ad angulos rectos AG = a & GH = $\frac{1}{2}b$, ductaq; AH & prolongata describatur circellus intervallo GH: Sic habebitur AE latus minus & AD majus rectanguli desiderati &c.

Regula arithmetica: Addantur area data & quadratum dimidiæ differentiæ, & è Summa extractæ radici quadratæ dematur & addatur differentia; sic habebuntur latera rectanguli, ibi minus, hîc majus.

PROBLEMA V.

D*Atis pro triangulo rectangulo differentiis utriusq; lateris ab hypotenusa, invenire latera & ipsum triangulum.* Sit e g. lateris minoris differentia BD & majoris DE (*n. 1. Fig. XXXV.*) & quærantur latera ipsa, ut construi triangulum possit.

SOLUTIO.

PRo BD ponatur a, pro DE, b. Sit majus latus x; erit hypot. $x + b$: Ergo

 minus

minus latus $x + b - a$. Jam □□ laterum sunt = □ hypot. h. e. $2xx - 2ax + 2bx + bb - 2ab + aa = xx + 2bx + bb$ & tollendo $xx + 2bx + bb$,

$$xx - 2ax - 2ab + aa = 0;$$ & addendo $2ax$ & $2ab$, tollendo verò aa

$$xx = 2ax + 2ab - aa.$$ Ergo

$$x = a + \sqrt{aa + 2ab - aa};$$ h. e.

$$x = a + \sqrt{2ab}.$$

Constructio geometrica: Inter BD & DE, differentias datas, inveniatur (*n. 3.*) media proportionalis DF, & huic jungatur ad angulos rectos æqualis FG, ductæque DG abscindatur æqualis DH; sic habebitur BH latus majus trianguli desiderati. Hoc prolongato in C, ut HC sit = b, super tota BC descripto semicirculo applicetur BA = BH; ductâque AC formatum erit triangulum desideratum ABC.

Regula arithmetica: Ex gemino rectangulo differentiarum extracta radix quadrata si addatur differentiæ majori, habebitur latus majus quæsitum &c.

PROBLEMA VI.

D*Atis pro duobus rectangulis inæqualibus, sed æquè-altis, Summa basium cum alterutrius (e.g. majoris) area, & proportione laterum alterius (nempe hîc minoris,) inve-*

nire

nire latera seorsim. E. g. Summa basium sit AB (*n. 1. Fig. XXXVI.*) & □ lineæ BC = areæ majoris rectanguli; minoris verò rectanguli latera habeant ad se invicem ut GD ad DE: quæruntur latera utriusque rectanguli; h. e. quæritur altitudo communis, quâ repertâ latera reliqua ex datis facilè habebuntur; aut quæritur basis majoris, quæ cætera pariter facilè patefaciet.

SOLUTIO.

SIt AB = a, & area majoris rectanguli □ = bb; proportio altitudinis ad basin in minore, ut c ad d: quæritur e. g. basis major, quæ sit x. Ergo altitudo communis erit = $\frac{bb}{x}$, & basis minoris rectanguli = $a-x$.

Pro Æquatione igitur erit

$$\text{ut } c \text{ ad } d \text{ sic } \frac{bb}{x} \text{ ad } a-x.$$

Ergo $ac-cx = \frac{bbd}{x}$; & multipl. per x,

$acx-cxx = bbd$, & addendo cxx, tollendo verò bbd,

$acx-bbd = cxx$.

Jam, ut commodè dividi possit utrinque per c, fiat prius, ut c ad b, sic d ad quartum quod dicatur f, ponaturq; deinde cf pro bd, & erit

$acx - bcf = cxx$; & dividendo per c,
$ax - bf = xx$; adeoq; juxta Cas. 3.

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bf}$$
$$\text{vel } \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bf}.$$

Constructio geometrica: Quæratur primùm quantitas f (*num. 2. Fig. XXXVI.*) juxta illationem proximam, ut c ad b sic d ad f; eritque media proportionalis inter b & $f = \sqrt{bf}$. Deinde intervallo $\frac{1}{2}a$ descripto semicirculo (*n. 3.*) super data AB, & erecta BD $= \sqrt{bf}$ eique æquali facta EF, habebitur CF $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bf}$: Cui addita AC dabit valorem x unum, & FB alterum. Pro altitudine communi verò, quæ dicebatur $\frac{bb}{x}$, fit ut x ad b — sic b ad quartam, h. e. ut AF ad FH, sic FH ad FG; quæ erit altitudo utriusque rectanguli Ag & Bg nunc facilè construendorum.

Regula aritlmetica ex hac etiam æquatione reducta haberetur facilè; commodiorem tamen dabit hæc

Altera SOLUTIO.

Sint cætera ut suprà, x verò hic ponatur pro altitudine communi, & ratio baseos rect-

rectanguli minoris ad hanc altitudinem exprimatur nomine e, eritque illa basis $= ex$: Ergo basis majoris rectanguli $= a - ex$. Ductâ jam in utramque basin altitudine communi, habebitur area majoris rectanguli $ax - exx$, & hinc Æquatio:

$ax - exx = bb$, & addendo exx, tollendo verò bb

$ax - bb = exx$; & dividendo per e,

$\frac{ax - bb}{e} = xx$. Ergo per Caſ. 3.

$$x = \frac{a}{2e} + \sqrt{\frac{aa}{4ee} - \frac{bb}{e}} \text{ vel } x = \frac{a}{2e} - \sqrt{\frac{aa}{4ee} - \frac{bb}{e}}.$$

Talis igitur nunc foret *Regula arithmetica*: Si ex quarta parte quadrati Summæ baſium per □ nominis rationis diviſi ſubtrahatur area data per idem nomen rationis diviſa, & ex reſiduo extracta radix addatur vel ſubtrahatur dimidiæ Summæ baſium per eundem rationis indicem diviſæ; hoc aggregatum vel hoc reſiduum dabit altitudinem datorum rectangulorum, & hæc multiplicata per nomen rationis baſin unam: hæc verò porrò ſubtracta ex baſium Summa data, etiam baſin alteram. Exempli loco ſit Summa baſium 16, area alterutrius rectanguli 30, nomen rationis quam habet altitudo communis ad baſin alterius rectanguli = 2. Proveniet altitudo communis nunc 5, nunc 3 &c.

PROBLEMA VII.

Dato perpendiculo trianguli rectanguli ex angulo recto demiſſo, ejusdemq; baſi,

hujus invenire segmenta, & sic triangulum ipsum describere.

E. g. Si basis futuri △ rectanguli daretur AB (*Fig. XXXVII.*) & perpendiculi longitudo BE vel BF; quæruntur segmenta baseos, adeoque punctum D, ex quo sit statuenda perpendicularis CD pro formando triangulo ABG.

SOLUTIO.

Sit basis data $= a$; perpendiculum datum $= b$; segmentum baseos unum $= x$: erit alterum $= a - x$, & b media proportionalis inter dicta segmenta, h. e.

x ad b ut b ad $a - x$.

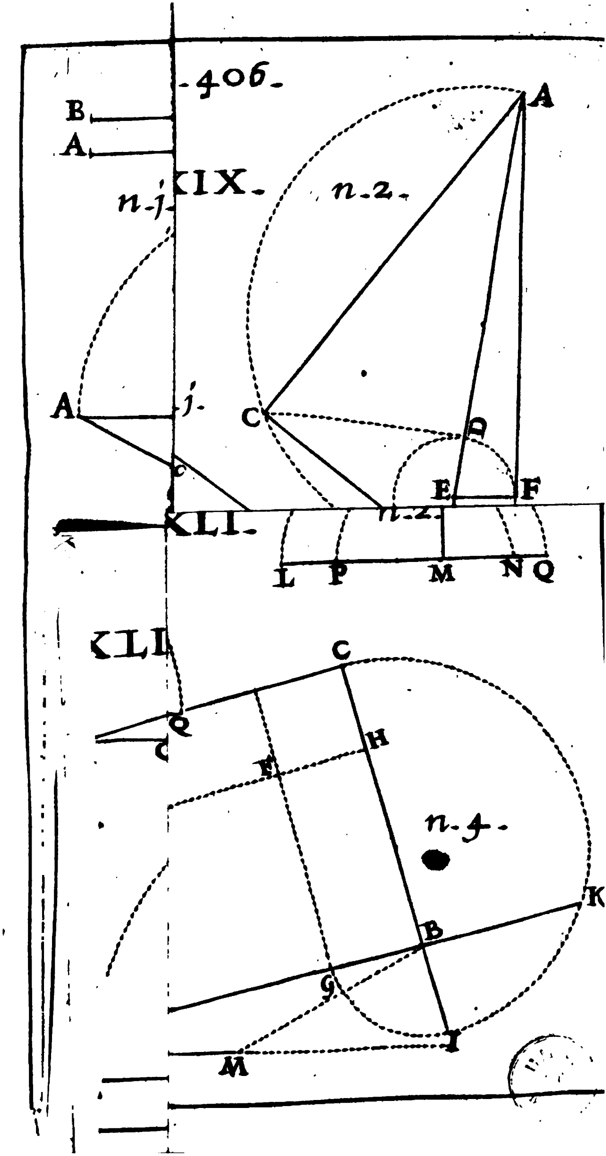
Ergo $ax - xx = bb$; & addendo xx, tollendo verò bb,

$ax - bb = xx$. Ergo per Cas. 3.

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb}$$

$$\text{vel } \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb}.$$

Constructio geometrica: Descripto semicirculo super data AB, si erigatur perpendicularis BE, & ex puncto G, (quod determinat EG parallela cum AB) demittatur ipsi æqualis GD, habebuntur duo segmenta quæsita, $AD = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - bb}$ & $DB = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa}$


406
XIX
n.1
n.2
XLI
n.4
A
B
C
D
E
F
L
P
M
N
Q
H
G
K
I

$-\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$. Quæ quidem constructio quin obvia futura fuisset attendentibus etiam sine analysi, negari haut potest.

Notandus autem obiter casus ille, quo perpendiculum datum esset non BE, sed BF. In hoc enim erectâ super AB hac perpendiculari BF, parallela FG non secaret semicirculum; indicio infallibili, problema in hoc casu involvere impossibilitatem, cùm supponatur perpendiculum majus dimidia basi; id quod cum angulo recto stare nunquam potest.

Regula arithmetica: Ex quadrato basis dimidiæ dematur quadratum perpendiculi dati, & ex residuo extracta radix addatur & subtrahatur basi dimidiæ; dabitque ibi Summa segmentum majus, & hic differentia minus.

PROBLEMA VIII.

Dato perpendiculo futuri trianguli rectanguli ex angulo recto demittendo, ac differentiâ segmentorum baseos, invenire ipsa segmenta ac triangulum describere.

E.g. Si perpendiculum sit, ut suprà, BE, & segmentorum differentia AH, (*num. 1. Fig. XXXVIII.*). quæruntur segmenta AD & DB, ex quorum communi termino sit erigenda perpendicularis DG vel DC pro formando triangulo.

SOLUTIO.

Sit minus segmentum = x & differentia segmentorum = a, erit majus segmentum $x + a$. Sit perpendiculum datum, ut antè, = b: Ergo erit

ut $x + a$ ad b, sic b ad x; adeoq;

$xx + ax = bb$; & subtrahendo ax,

$xx = -ax + bb$. Quare, juxta Cas. 2.

$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Constructio geometrica: Fiat HD = $\frac{1}{2}a$, DG = b & perpendicularis; erit HG = $\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ = HB vel HA, ducto sc. semicirculo ex H per G. Ergo DB est segmentum minus, & AD majus; ductisque AG & BG, vel ex opposito (facto perpendiculo DC = DG) AC & BC, constructum erit triangulum. Vel cum Cartesio, fiat HE (*n. 2.*) = $\frac{1}{2}a$ & EB = b, & descripto circulo ex H per E ducatur BHA; sic habebuntur duo segmenta quæsita AB majus, & DB minus.

Regula arithmetica: Jungantur quadrata semidifferentiæ & perpendiculi in unam Summam, indeq; extractæ radici dematur differentia dimidia; quod restat, est segmentum quæsitum minus; & additâ differentiâ habebitur etiam majus.

PROBLEMA IX.

D*Atis, pro triangulo rectangulo, segmento*

baseos

baseos uno & latere alteri segmento adjacente, invenire reliqua, ipsumq; triangulum construere.

Ut si datum esset segmentum baseos minus DB (*Fig. XXXIX. n. 1.*) & latus alteri segmento adjacens AC; quæritur segmentum baseos majus, quo invento reliqua habentur ac totum triangulum.

SOLUTIO.

DAtum segmentum sit $= b$, latus datum $= c$, segmentum quæsitum $= x$. Quod si igitur triangulum ABC fingamus tanquam jam inventum, apparet 1. Si ex quadrato AC subtrahatur □ AD, haberi □ CD $= cc - xx$. 2. Idem □ CD haberi quoque aliter posse ex eo, quòd propter angulum ad C rectum, CD sit media proportionalis inter BD & DA, h. e. inter b & x; unde factum extremorum bx = □ medii CD. Sequitur ergo nunc 3. esse

$cc - xx = bx$; & addendo xx

$cc = bx + xx$; & tollendo bx,

$-bx + cc = xx$. Ergo juxta Cas. 2.

$$x = -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + cc}.$$

Constructio geometrica: Jungantur EF $= \frac{1}{2}b$, (*n. 2, Fig. XXXIX.*) & FA $= c$ ad angu-

los rectos & descripto circulo ex E per F, ducatur AEB; sic habebitur DA segmentum majus & DB minus. Erectâ igitur ex D perpendiculari indefinita, & super AB descripto semicirculo, habebitur C vertex trianguli desiderati pro ducendis lateribus AC & BC.

Regula arithmetica: Jungantur □ dimidii segmenti dati & □ dati lateris in unam Summam; & extractæ inde radici si dematur semissis dati segmenti, habebitur segmentum quæsitum.

PROBLEMA X.

Datis pro triangulo obliquangulo perpendiculari altitudine, differentiâ segmentorum baseos, & laterum reliquorum differentiâ, invenire ipsa latera, & triangulum formare.

Ut, si data esset altitudo CD (*n. 1. Fig. XL.*) differentia segmentorum baseos EB & differentiâ laterum FB (prout hæc ex Δ ABC (*n. 2.*) anticipando utcunque formato patent) & sit determinanda basis ipsa cum utroque latere &c.

SOLUTIO.

Sit perpendiculum datum CD ☰ *a*, (*Vid. n. 2. Fig. XL.*) EB ☰ *b*, FB ☰ *c*: Pro segmento baseos minore AD ponatur *x*, eritque majus *x* † *b*. Patet nunc □ CB

haberi

haberi posse ex additione □□ DC & BD, sc. $aa + xx + 2bx + bb$; & □ AC ex additione □□ AD & DC, scil. $aa + xx$: ita ut latus AC futurum sit $= \sqrt{aa + xx}$, & latus BC $= \sqrt{aa + xx + 2bx + bb}$. Cùm verò hoc idem latus BC haberi quoque possit, lateri AC addendo differentiam c, ut sit $= c + \sqrt{aa + xx}$; in promptu jam est æquatio:

$$c + \sqrt{aa + xx} = \sqrt{aa + xx + 2bx + bb},$$

& multiplicando utrinq; quadratè,

$$cc + aa + xx + \sqrt{4ccaa + 4ccxx} = aa + xx + 2bx + bb,$$

& subtrahendo utrinq; $cc + aa + xx$

$$\sqrt{4ccaa + 4ccxx} = 2bx + bb - cc;$$

& rursum quadratè multiplicando,

$$4ccaa + 4ccxx = 4bbxx + 4b^3x - 4bccx + b^4 - 2bbcc + c^4;$$

& subtrahendo utrinque $4ccxx$ (quia c minor quàm b) cæteraq; decenter transponendo,

$$\begin{matrix} 4ccaa - 4b^3x - b^4 \\ + 4bccx + 2bbcc \\ - c^4 \end{matrix} = 4bbxx - 4ccxx;$$

& dividendo per $4bb - 4cc$

$$\frac{\begin{matrix} 4cccaa - 4b^3x - b^4 \\ + 4bccx + 2bbcc \\ - c^4 \end{matrix}}{4bb - cc} = xx.$$

h. e. dividendo quantitates affectas per 4 suprà & infrà,

$$\frac{-b^3x \dagger bccx}{bb-cc} \dagger \frac{4ccaa-b^4 \dagger 2bbcc-c^4}{4bb-4cc} = xx;$$

Et partem priorem actu ipso dividendo per $bb-cc$

$$-bx \dagger \frac{4ccaa-b^4 \dagger 2bbcc-c^4}{4bb-4cc} = xx.$$

Ergò secundùm Cas 2.

$$-\tfrac{1}{2}b \dagger \sqrt{\tfrac{1}{4}bb \dagger \frac{4ccaa-b^4 \dagger 2bbcc-b^4}{4bb-4cc}} = x,$$

aut portione radicis $\frac{1}{4}bb$ ad eandem denom. cum cæteris reducendo.

$$-\tfrac{1}{2}b \dagger \sqrt{\frac{b^4-bbcc \dagger 4ccaa-b^4 \dagger 2bbcc-c^4}{4bb-4cc}} = x$$

ac delendo tandem quæ se mutuò tollunt,

$$-\tfrac{1}{2}b \dagger \sqrt{\frac{4ccaa \dagger bbcc-c^4}{4bb-4cc}} = x.$$

Regula arithmetica: Multiplica quadruplum quadratum FB in quadratum perpendiculi CD, cique adde productum quadrati EB in □ FB, & de Summa subtrahe quadrato-quadratum FB; eritque residuum inventum primum. Deinde subtrahe quadruplum quadratum FB ex quadruplò quadrato EB; & residuum erit inventum secundum.

Deni-

Denique divide inventum primum per secundum, & è quoto extractæ radici deme dimidium EB: Sic habebis baseos segmentum minus quæsitum &c. E, g. in numeris poterit poni 2 pro FB, 4 pro EB, 12 pro CD.

Pro *Constructione geometrica* (prout à nobis concepta est) æquationis ultimæ quantitas sub radicali signo contenta suppeditabit hunc analogismum:

Ut $4bb - 4cc$ ad $4aa + bb - cc$; sic cc ad quartum; sive dividendo omnia per 4,

ut $bb - cc$ ad $aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc$; sic $\frac{1}{4}cc$ ad quartum, quod est $\frac{1}{4}$ illius quantitatis sub radicali signo. Assumptâ igitur quantitate c pro unitate, fiat (*n. 3.*) IK $=$ c IN & KL $=$ b; erit NO $=$ bb, & subtractâ OP $=$ cc (h. e. unitati) restabit NP $=$ $bb - cc$. Similiter IS & KM $=$ a, erit ST $=$ aa; cui si addatur SX $=$ $\frac{1}{4}$ NO, & hinc retrò demantur XV $=$ $\frac{1}{4}$ unitatis; erit TV $=$ $aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc$. Huic igitur TV si porrò fiat æqualis NR, & PQ $=$ $\frac{1}{4}$ unitatis sive cc, cùm NP sit $=$ $bb - cc$; per regulam proportionum proveniet DR $\frac{1}{4}$ illius quantitatis, quæ est sub signo radicali, Hæc ergo quater sumta dabit DZ pro tota illa quantitate: Cui si jungatur Dy $=$ unitati, & super tota YZ descripto semicirculo, erigatur perpendicularis DE; hæc erit radix dictæ quantitatis, & demptâ hinc desuper EF $=$ $\frac{1}{2}b$, habebitur DE vel DA segmentum baseos minus quæsitum. Ergo

ad

ad DG addendo GB = b, DB erit segmentum majus, &, perpendiculo DC demisso = a, latera quæsita BC & AC. Q.E.F.

IV. EXEMPLA

quædam

Quadrato-quadraticarum affectarum, sed affectis quadraticis similium.

PROBLEMA I.

INvenire quadratum ABCD (quale fingimus interim esse n. 1. Fig. XLI.) *à quo abscisso quadrato AEFG, quod sit prioris dimidium, relinquatur rectangulum GC datæ areæ.* E. g. Sit area data æqualis quadrato lineæ datæ LM, & quærantur latera quadratorum AB & AE vera, his fictis n. 1. respondentia.

SOLUTIO.

POnatur ergo area residui futuri rectanguli = bb, & GB = x; erit BC vel AB = $\frac{bb}{x}$, & hinc subtractâ GB, reliquum latus minoris quadrati AG = $\frac{bb}{x} - x$,

$-x$, i. e. $\frac{bb - xx}{x}$. Hujus igitur quadratum cùm supponatur dimidium quadrati AB, in promptu est Æquatio:

$$\frac{b^4 - 2bbxx + x^4}{xx} = \frac{b^4}{2xx};$$

& multiplicando per xx,

$$b^4 - 2bbxx + x^4 = \frac{b^4}{2};$$

& multiplicando per 2,

$$2b^4 - 4bbxx + 2x^4 = b^4;$$

& subtrahendo $2b^4$, addendo verò $4bbxx$,

$$2x^4 = 4bbxx - b^4;$$

& dividendo per 2,

$$x^4 = 2bbxx - \frac{b^4}{2}.$$

NB. *Hæc eadem æquatio obtinebitur, si, ponendo* x *pro GB vel FH, & invento* □ *AG vel GF ut suprà, inferatur* $\frac{b^4 - 2bbxx + x^4}{xx} = 2bb - xx$.]

Ultima verò ista æquatio, tametsi sit quadrato-quadratica, potest tamen jure haberi pro quadratica tantùm, cùm in ea non habeatur x^3 neque x, eique adeò substitui hæc:

$yy =$

$yy = 2bby - \frac{b^4}{2}$, supponendo sc. $y = xx$. Unde secundùm Cas. 3. quadrat. affect. y erit $= bb + \sqrt{b^4 - \frac{b^4}{2}}$ i.e. $\sqrt{\frac{b^4}{2}}$

vel $= bb - \sqrt{\frac{b^4}{2}}$.

Ergo $x = \sqrt{bb + \sqrt{\frac{b^4}{2}}}$.

Constructio geometrica: Quod si nunc linea data b sumatur pro unitate, erunt bb & b^4 = = eidem lineæ. Ergo, si inter LM tanquam unitatem, & MN $= \frac{1}{2}b$ sc. $\frac{b^4}{2}$ inveniatur media proportionalis MO (*n. 2. Fig. XLI.*) hæc erit $= \sqrt{\frac{b^4}{2}}$, & hæc subtracta ex LM, eidemque addita, dabit LP & LQ duos valores quantitatis y. Porrò ergo ex hac extrahendo radices, h. e. inter inventas quantitates LP & LQ & unitatem inveniendo alias medias proportionales LR & LS, (*n. 3.*) erunt hi duo valores quantitatis x quæsitæ; quorum prior LR satisfaciet quæstioni, alter autem LS impossibilitatem involvit. Pro □ ipso igitur formando, cùm ejus latus fuerit $= \frac{bb}{2}$; faciendo (*n. 4.*) ut x ad b, sic b ad quartum, idipsum habebitur: eritque loco examinis, si inter BI = LR & latus □ti BC inventa

venta, media proportionalis BK æqualis sit datæ LM.

Regula arithmetica: Ex area data, sive quadrato datæ lineæ LM, subtrahatur radix dimidii quadrato-quadrati ejusdem lineæ; sic habebitur valor quadrati FC s. xx; Ergo hinc porrò extracta radix quadrata erit valor ipsius x quæsitus.

PROBLEMA II.

Invenire aliud quadratum ABCD (Fig. XLII. n. 1, rudicer interim adumbratum) *è cujus medio si tollatur aliud quadratum EFGH, quod sit pars quarta prioris, area rectanguli inter BC & prolongatum FG intercepti BK sit æqualis quadrato datæ lineæ LM*; h. e. his datis invenire segmentum BI, & consequenter etiam latus BC vel AB.

SOLUTIO.

Sit area rectanguli dati, sive quadratum LM $= bb$, & latus quæsitum rectanguli BI $= x$; erit alterum latus BC $= \frac{bb}{x}$, & ex hoc subtractis IB & GK (h. e. $2x$) latus minoris quadrati FG $= \frac{bb}{x} - 2x$, h. e. $\frac{bb-2xx}{x}$; cujus quadratum cùm sit

 quarta

quarta pars quadrati majoris ex hypoth[esi] erunt

$$\frac{4b^4 - 16bbxx + 4x^4}{xx} = \frac{b^4}{xx},$$

& multiplicando utrinq; per xx

$$4b^4 - 16bbxx + 4x^4 = b^4,$$

& tollendo $4b^4$, addendo verò $16bbxx$,

$$4x^4 = 16bbxx - 3b^4;$$

& dividendo per 4,

$$x^4 = 4bbxx - \tfrac{3}{4}b^4.$$

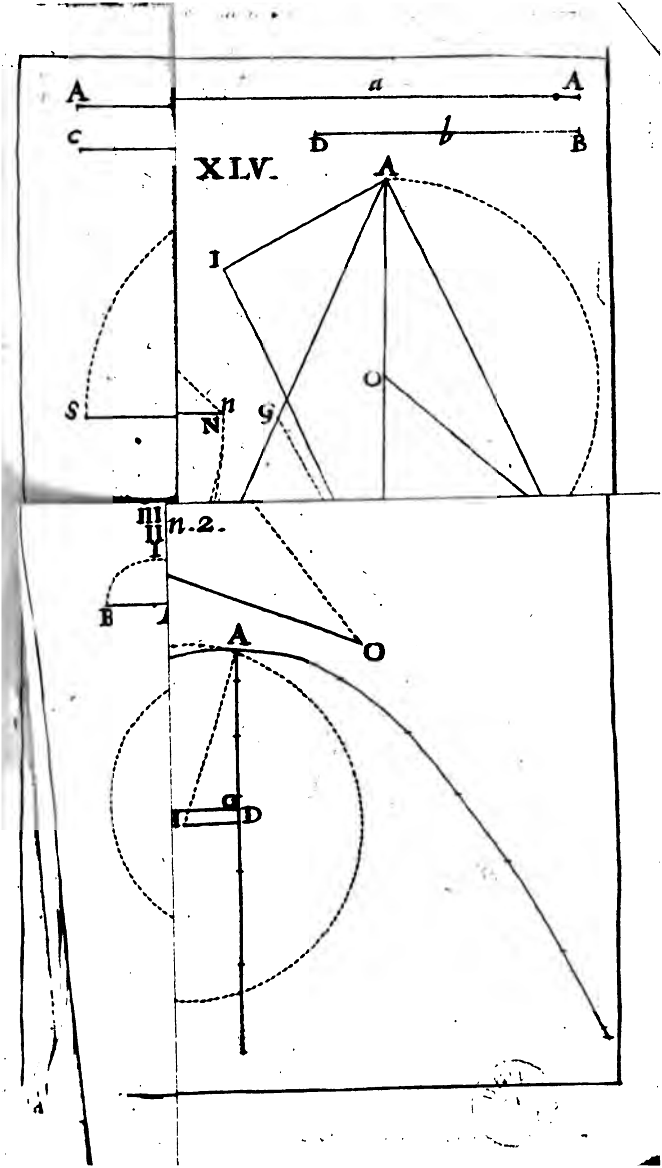
Ergo, juxta Cas. 3. quadraticarum affe[cta]rum,

$$xx = 2bb \pm \sqrt{4b^4 - \tfrac{3}{4}b^4} \text{ h. e.}$$

$$= 2bb \pm \sqrt{3\tfrac{1}{4}b^4}.$$

Ergo $x = \sqrt{2bb \pm \sqrt{3\tfrac{1}{4}b^4}}.$

Constructio geometrica: Si linea data [su]matur pro unitate, b^4 & bb eidem eru[nt æ]quales. Ergo, si inter LM, tanquam un[i]tatem, & MN $= 3\frac{1}{4}b$, inveniatur m[edia] proportionalis MO (*n.* 2. *Fig.* XLII.) erit $\sqrt{3\frac{1}{4}b^4}$; & subtracta ex MQ = vel eidem addita, dabit duos valores qu[an]tatis xx, PQ nempe & IQ; quorum [...] tamen verus tantùm erit & hujus loci. P[ost] ergo inter PQ & unitatem inventá media


XLV.
A
a
A
c
D
b
B
A
I
O
S
N
n
g
III
II
I
n.2.
B
A
O
A
D

portionalis QR exprimet quantitatem x desideratam.

Pro quadrato ipso igitur formando, cùm ejus latus AB sit $= \frac{bb}{x}$, prorsus ut in superiore constructione proceditur. (*Vid. n. 3*)

PROBLEMA III.

Datâ basi trianguli-rectanguli, & media proportionali inter hypotenusam & perpendiculum, invenire ipsum triangulum. Ut, si basis data esset AB (*Fig. XLIII.*) & proportionalis inter AC & BC media CD; quærerentur ipsum perpendiculum BC & hypotenusa AC.

SOLUTIO.

POnatur basis data $= a$, & proportionalis media $= b$, perpendiculum BC $= x$, erit hypotenusa, vi hypotheseos, $= \frac{bb}{x}$.

Ergo

$$\frac{b^4}{xx} = aa + xx;$$

& multiplicando utrinq; per xx,

$$b^4 = aaxx + x^4;$$

& subtrahendo $aaxx$;

$$b^4 - aaxx = x^4.$$

Ergo

Ergo per Caſ. 2. quadraticarum affectarum

$$xx = -\tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + b^4},$$

$$\& x = \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + b^4}}.$$

vel ſic:

Sit hypotenuſa AC $= x$, erit perpendiculum BC $= \frac{bb}{x}$. Ergo

$$xx = aa + \frac{b^4}{xx};$$

& multiplicando per xx,

$$x^4 = aaxx + b^4.$$

Ergo per Caſum 1.

$$xx = \tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + b^4}$$

$$\& x = \sqrt{\tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + b^4}}.$$

Conſtructio geometrica prima, æquationis poſterioris. Si a ponatur pro unitate, erit linea AB etiam $= aa$, & faciendo, ut a ad b, ſic b ad tertiam, h. e. ut LM ad MN, ſic LO ad OP, habebitur bb. Super AM igitur $= \frac{1}{2}aa$, erectâ perpendiculari AQ $=$ OP, ductâ MQ vel æqualis Mm, erit $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + b^4}$ & conſequenter An $= \tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + b^4}$ h. e. valor ipſius xx. Porrò igitur inter An & AR unitatem inventa media

dia proportionalis AG, erit valor ipsius x, h. e. hypotenusa quæsita; quâ inventâ triangulum ABC facilè completur.

2. In Casu prioris æquationis, factis omnibus ut priùs, AK esset valor quantitatis xx h. e. $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + b^4}$. Inventa igitur inter RS = AK & AR unitatem proportionalis media RT erit valor ipsius x, h. e. perpendiculum quæsitum, adeoq; AT hypotenusa quæsiti trianguli.

Regula arithmetica, in solutione 1. Addatur quadrato-quadratum datæ mediæ proportionalis quadrato-quadrato dimidiæ basis datæ; & è Summa extractæ radici dematur dimidium quadratum basis datæ; residui radix dabit perpendiculum trianguli quæsiti. In solutione 2. primæ radici ut antè inventæ, addatur dimidium quadratum basis datæ, & radix Summæ dabit hypotenusam quæsiti trianguli.

PROBLEMA IV.

D*Ata hypotenusâ trianguli rectanguli, & media proportionali inter latera, invenire ipsum triangulum.* Ut si hypotenusa esset AC (*Fig. XLIV.*) & media proportionalis inter latera BD, & quærerentur ipsa latera AB & BC.

SOLUTIO.

P Onatur hypotenusa data = a, & proportionalis media = b, perpendi-

lum BC $= x$; erit basis AB per hypothe-
sin $= \frac{bb}{x}$. Ergo

$$\frac{b^4}{xx} + xx = aa;$$

& multiplicando per xx,

$$b^4 + x^4 = aaxx;$$

& subtrahendo b^4,

$$x^4 = aaxx - b^4.$$

Ergo per Cas. 3.

$$xx = \tfrac{1}{2}aa \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - b^4};$$

$$\& \; x = \sqrt{\tfrac{1}{2}aa \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - b^4}}.$$

Constructio geometrica: Si a ponatur
unitate, erit AC etiam $= aa$, & facien-
ut AC ad CG (a ad b), sic AF ad (
(b ad tertiam) erit hæc tertia GH =
Assumptâ igitur OC $= \frac{1}{2}aa =$ OB r
semicirculi, & erectâ CD $= bb =$ BE
center parallelâ; erit EO $\sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^4}$
consequenter EC $= \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^4}$.
verò $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^4}$, geminus scil.
quantitatis xx. Ergo pro gemino v
ipsius x, extrahendæ ex his radices, h.
ter unitatem AC & $\sqrt{}$ EC ex un
AK = AE ex alterâ parte, inveniendæ
diæ proportionales AL & AM. Qu

hæ postremæ compendiosiùs habeantur, & ipsum triangulum statim constructum sit, si, EC & EA inventis, ducantur CB & AB: hæ ipsæ enim sunt duæ illæ postremæ mediæ proportionales = = AL & AM; siquidem, propter △△ ABC, AEB & BEC, BC est media proportionalis inter AC & CE, & AB media proportionalis inter eandem AC & AE per 8. Lib. VI. Euclid. quæ est Consect. 3. Schol. II. Prop. XXXIV. Lib. I. Mathes. Enucl.

PROBLEMA V.

Datis parallelogrammi rectanguli areâ & lineâ diagonali, invenire latera & ipsum parallelogrammum. Ut, si area data sit = quadrato lineæ datæ BD (*Fig. XLV.*) & linea diagonalis AC, & quærerentur latera AB & BC.

SOLUTIO.

Si pro area data, sive quadrato lineæ BD ponamus bb, & diagonalem AC = a, pro minore latere BC verò x; erit alterum latus = $\frac{bb}{x}$. Ergo $\frac{b^4}{xx} + xx = aa$; & multiplicando per xx,

$$b^4 + x^4 = aaxx;$$

& subtrahendo b^4,

$x^4 = aaxx - b^4$. Quæ æquatio, cùm

sit eadem prorsus cum illa Probl. IV. præced. (id verò mirum esse non debet, cùm reipsa hoc quintum cum IVto coincidat; siquidem diagonalis AC est hypotenusa, & BD, cujus quadratum = areæ datæ rectanguli, media proportionalis inter latera AB & BC) eâdem etiam constructione gaudebit (*Vid. Fig. XLV.*), eademq; regulâ arithmeticâ, ex æquatione ultima præced. Probl. facillimè formanda.

PROBLEMA VI.

Datâ primâ trium proportionalium linearum, & aliâ quæ possit utrumq; quadratum duarum reliquarum, invenire has ipsas duas proportionales. Ut, si AC (*Fig. XLVI.*) sit prima trium proportionalium, alia verò ED data, cujus quadratum exæquet duo quadrata reliquarum simul sumpta; quæruntur hæ ipsæ, tanquam secunda & tertia proportionalis.

SOLUTIO.

SI pro AC ponamus a, & datam ED = c, secundam verò proportionalem x; erit tertia $\frac{xx}{a}$. Quadrata igitur duarum ultimarum, erunt $\frac{x^4}{aa}$

$\frac{x^4 + xx}{aa} = cc$, $\square$ ED, per hyp.

multiplicando utrinque per aa,

$x^4 + aaxx = aacc$;

ibtrahendo $aaxx$,

$x^4 = -aaxx + aacc$. Ergo

$xx = -\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aacc}$;

$x = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aacc}}$.

nstructio geometrica: Si a ponatur pro te, erit AC = quoque aa & a^4, & fa- & ut AC ad CD (a ad c) sic AF ad (c ad tertiam) erit DE = cc. Factâ nunc AK = DE h.e. cc, inter AC & inventa media proportionalis AI est cc. Ergo sumptâ AO = $\frac{1}{2}$AC h.e. $\frac{1}{2}aa$, enusa OI erit = $\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aacc}$. Ab re æquali OH, subtracta OA = $\frac{1}{2}aa$ re- ua AH valorem ipsius xx, & hinc ex- radix, h.e. inter AC & AH alia me- portionalis AG est valor ipsius x h.e. a quæsitarum proportionalium: & cùm prima data, erit AH tertia. Q.E.F.

Potest autem abbreviari hæc constru- prima operatio, quâ quæritur DE, cui fit æqualis AK, omitti. Cùm enim CA, & DE quærendam, adhibeatur proportionalis CD vel AF, quæ est = D, & verò AI postea quæsita est etiam

proportionalis media inter AC & AK; patet AI esse æqualem datæ ED, & consequenter statim ab initio datæ AC posse ad angulos rectos jungi, cæteraque deinceps fieri ut priùs.

V. EXEMPLA

quædam

Æquationum Cubicarum & Quadrato-quadraticarum, sive simplicium sive affectarum, sive reducibilium, sive non-reducibilium.

PROBLEMA I.

INter datas duas lineas rectas invenire duas medias proportionales. E. g. dentur AB prima & CD quarta, *(Fig. XLVII. n. 1.)* sintque inter has duas inveniendæ duæ mediæ proportionales.

SOLUTIO.

SIt prima datarum AB $= a$, altera CD $= q$, media prior $= x$; erit posterior $= \frac{xx}{a}$, & consequenter $\frac{x^3}{aa} = q$; & multiplicando per aa,

$$x^3 = * * aaq.$$

Regula centralis erit: $\frac{L}{2} = AD$

$\frac{r}{2L^2} = DH$, h. e. secundùm suppositionem mox sequuntam, $\frac{1}{2}a = AD$, & $\frac{1}{2}q = DH$.

Constructio geometrica: Si AB sive, a, sumatur pro unitate & insimul pro latere recto describendæ parabolæ, & hoc latere recto mediante parabola descripta fit, juxta Schol. I. Prop. I. Lib. II. Mathes. Enucl. [*Vid. n. 2. & 3. Fig. XLVII.*] in quibus AB est latus rectum, A 1, A 2 &c. abscissæ, A I, A H &c. semiordinatæ, fiat porrò (*n. 4.*) AD = $\frac{1}{2}a$, & ex D erectâ perpendiculari = $\frac{1}{2}q$, describatur circulus intervallo HA, parabolam secans in N e quo facta perpendicularis ad axem NO erit radix quæsita sive valor ipsius x, h. e. prior mediarum, & consequenter OA altera; cùm NO per proprietatem parabolæ primam [Vid. Prop. I. Lib. II. Mathes. Enucl.] fit media proportionalis inter latus rectum AB & abscissam AO. Et hoc modo prodit per Backeri regulam centralem ipsissima Constructio Cartesiana, quæ extat Geom. p. m. 91.

Regula arithmetica: Quadratum primæ multiplicetur per quartam datam, & ex producto extracta radix cubica exprimet mediarum quæsitarum priorem.

PRO-

PROBLEMA II.

Datâ solidi aut cavi parallelepipedi capacitate, & ratione laterum, invenire ipsa latera. Ut, si capacitas data esset = Cubo lineæ cujusdam datæ IK (*Fig. XLVIII. n. 1.*) Ratio verò altitudinis ad longitudinem sit ut AB ad BC, ad latitudinem autem, ut eadem AB ad BD; quæritur inprimis altitudo, quâ datâ non possunt reliquæ dimensiones ignorari, propter datas rationes.

SOLUTIO.

Sit IK = a, AB = b, BC = c, & BD = d; altitudo denique solidi quæsita, x erit,

ut b ad c, sic x ad longitudinem quæsitam $\frac{cx}{b}$;

& ut b ad d, sic x ad latitudinem quæsitam $\frac{dx}{b}$.

Multiplicatis ergo per se invicem his tribus dimensionibus parallelepipedi, habebitur ejus capacitas $\frac{cdx^3}{bb} = a^3$;

& multiplicando per bb,

$$cdx^3 = a^3bb;$$

& di-

ividendo per cd,

$$x^3 = \frac{a^3bb}{cd}$$ h. e.

$$x^3 ** - \frac{a^3bb}{cd} = 0.$$

egula generalis igitur eadem erit quæ

$\frac{L}{2} = AD$ & $\frac{r}{2L^2} = DH$; h. e. se-

lùm suppositionem statim secuturam

$\frac{a}{2} = AD$ & $\frac{a^3bb}{2cd} = DH.$

nstructio geometrica: Si IK vel a su-
pro unitate & unà pro Latere Recto, &
nediante parabolá describatur, eo modo
Fig. XLVII. n. 2. & 3. docuimus & im-
um semper adhibebimus; deinde verò,
æparanda quantitate $\frac{a^3bb}{2cd}$ (quæ in re-
entrali est quantitas $\frac{r}{2}$) fiat (n. 2.)

ξ — IM = BC — KL = BD — MN
ad c sic d ad e;
liceat pro cd ponere ae, posteaque
superne & inferne dividere; prodibit
as $\frac{r}{2} = \frac{aabb}{2e}$. Inferendo igitur porrò,
M

ut

ut $2e$ ad bb, sic aa ad quartum,
IO — IP = IT — IK — IQ.
habebitur quantitas DH, quæ centrum determinat, postquam AD facta est $= \frac{a}{2}$. Ex illo centro igitur per verticem parabolæ A (n. 3.) descripto circulo, ex intersectione ejusdem ducta semiordinata NO erit altitudo quæsita, longitudinem ac latitudinem per suprà datas rationes facilè datura.

Alia Solutio.

quæ foret accommodatior pro Regula arithmetica.

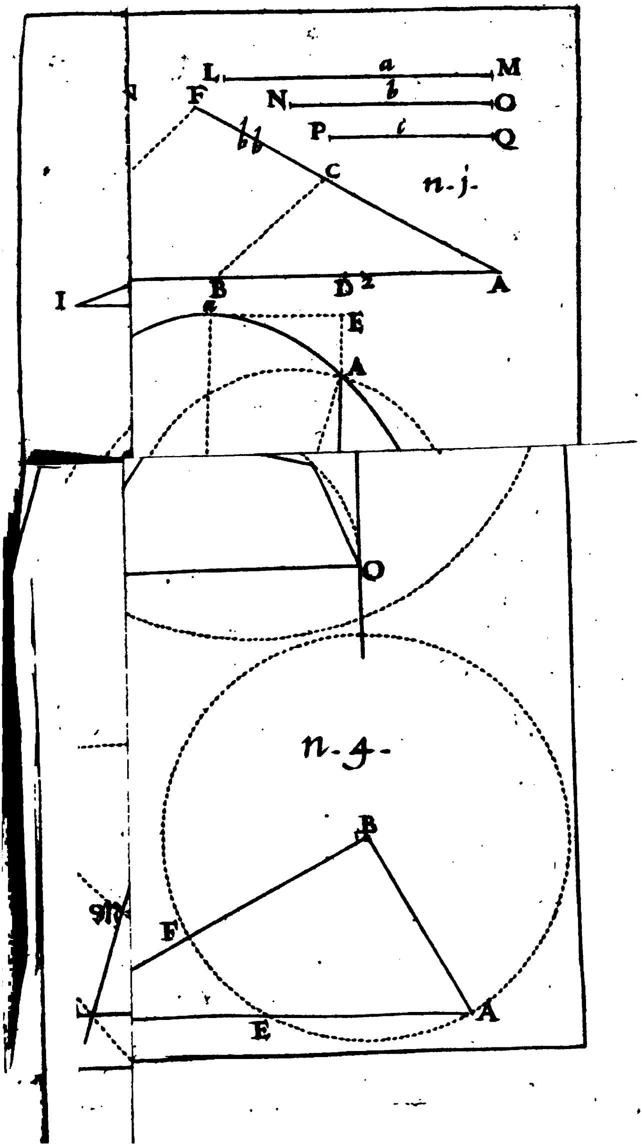
Sint data & posita cætera ut suprà, nom verò rationis, quam habet altitudo longitudinem, $= e$, & illius quam ha ad latitudinem $= i$, erit longitudo = & latitudo $= ix$. Multiplicatis igi per invicem lateribus, prodibit solid tota.

$$eix^3 = a^3;\ \text{\& dividendo per } ei$$

$$x^3 = \frac{a^3}{ei}.\ \text{Ergo}$$

$$x = \sqrt{C.\ \frac{a^3}{ei}}.\ \text{Hinc}$$

Regula arithmetica: Multiplica per invicem dita rationum nomina, & per productum divide Cubum datum;



L
a
M
F
N
b
O
P
c
Q
C
I
B
D
A
E
A
O
n. 4.
B
F
A
E

datum; quo facto, extracta radix Cubica ex quoto proveniente, erit altitudo solidi quæsita.

Constructio geometrica altera: Quod si hanc etiam æquationem, $x^3 = \frac{a^3}{ei}$ construere geometricè velimus, positâ AB = b pro unitate, erunt BC & BD nomina rationum = = e & i. Faciendo igitur 1.

IK IM KL MN

ut a ad e sic i ad quartam f (*Fig. XLIX. n. 1.*) erit $af = ei$, & æquatio proposita habebit hanc formam:

$$x^3 = \frac{a^3}{af} \text{ h.e. } \frac{aa}{f}$$

Ergo 2. faciendo

ut f ad a sic a ad tertiam IQ;

IO = MN— IK —IP = IK—

hæc erit valor ipsius x^3. Ex hoc verò 3. extrahendo radicem Cubicam, h.e. inter unitatem b, s. AB & lineam inventam IQ quærendo duas medias proportionales; earum prior dabit radicem desideratam.

NB. Eadem *Constructio geometrica* esset proditura secundùm Backeri regulam centralem, quæ pro formula æquationis foret, ut in præcedenti exemplo $x^3 ** - \frac{aa}{f} = 0$

h.e. sumendo b pro } $\frac{L}{2}$ = AD & $\frac{r}{2L^3}$ = DH,

latere recto & unit. } $\frac{b}{2}$ = AD & $\frac{aa}{2f}$ h.e. $\frac{1}{2}$ IQ = DH. (*Vid. Fig. XLIX. n. 2.*)

PRO-

PROBLEMA III.

D*Atâ solidì aut cavi parallelepipedi capacitate, & laterum differentiis, invenire ipsa latera.* Ut, si capacitas data æqualis esset Cubo lineæ cujusdam datæ EM (*Fig. L. n. 1.*) differentiâ verò, quâ longitudo excedit latitudinem = NO, & differentia, quâ latitudo excedit altitudinem, = PQ; quæruntur ipsa longitudo, latitudo, & altitudo.

SOLUTIO.

SIt latus Cubi dati = a, excessus longitudinis super latitudinem, NO, = b, latitudinis verò supra altitudinem, PQ, = c, & ponatur ipsa altitudo = x; erit latitudo = $x + c$, & longitudo $x + b + c$. Multiplicatis igitur per se invicem his tribus dimensionibus

$$\begin{array}{ll} \text{Longit.} & x + b + c \\ \text{Latit.} & x + c \\ \hline & cx + bc + cc \\ & xx + bx + cx \\ \hline & xx + bx + 2cx + bc + cc \\ \text{Altit.} & x \\ \hline \end{array}$$

Erit $x^3 \begin{matrix} + b \\ + 2c \end{matrix} xx \begin{matrix} + bc \\ + cc \end{matrix} x = a^3$

Vel

Vel juxta Cartesii & Backeri formulas

$$x^3 \begin{matrix} + b \\ + 2c \end{matrix} xx \begin{matrix} + bc \\ + cc \end{matrix} x - a^3 = 0.$$

Ergo Regula centralis per suppositionem statim sequentem contractior:

$$\frac{L}{2} + \frac{p^2}{8} \backsim \frac{q}{2} = AD$$

$$\& \frac{p}{4} + \frac{p^3}{16} \backsim \frac{pq}{4} \backsim \frac{r}{2} = DH.$$

h.c. vi modò dictæ suppositionis (quæ scil. L M s. *a*. sumet pro unitate & simul pro latere recto)

$$\frac{a}{2} + \frac{bb + 4bc + 4cc}{8} \backsim \frac{bcc \backsim cc}{2} = AD. \text{ Et}$$

$$\frac{b+2c}{4} + \frac{b^3 + 6bbc + 12bcc + 8c^3}{16} \backsim \frac{bbc \backsim 3bcc \backsim 2c^3}{4}$$

$$(\backsim \frac{bc+cc}{2} = DH.$$

Aut breviùs,

$$\frac{a}{2} + \frac{bb}{8} + \frac{bc+cc}{2} - \frac{bc-cc}{2} \text{ h.e. } \frac{a}{2} + \frac{bb}{8} = AD; \&$$

$$\frac{b+2c}{4} + \frac{b^3}{16} + \frac{1\frac{1}{2}bbc + 3bcc + 2c^3}{4} - \frac{bbc - 3bcc - 2c^3}{4}$$

$$(\backsim \frac{bc+cc}{2}, \text{ h.e.}$$

$$\frac{b+2c}{4} + \frac{b^3}{16} + \frac{bbc}{8} \backsim \frac{bc+cc}{2} = DH.$$

Et Contra.

Constructio geometrica. Si LM vel *a* sumatur pro unitate & simul pro latere recto describendæ parabolæ, hac descriptâ (*Fig. L n. 3*) determinandæ veniunt ante omnia duæ quantitates AD & DH: id quod gemino modo fieri potest; nimirum vel ex formula Backeriana Regulæ centralis, vel ex nostra, quantitatibus æquationis ultimæ immediatè applicata.

I. Pro AD, ex forma nostra, $\frac{a}{2} + \frac{bb}{8} =$ AD, faciendum est, (*Fig. L n. 1.*) ut *a* ad *b* sic *b* ad tertiam (AB ad AC, sic BE ad CF) quæ erit *bb*; & hujus CF pars octava D2 addenda ad A2 dimidiam AB. Ex Backeri formula verò 1. faciendum esset, ut AB ($= a$; n. 2.) ad AC ($= \frac{1}{2}p$, i.e. $\frac{1}{2}b + c$) sic BE ($= \frac{1}{4}p$, i.e. $\frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c$) ad quartam CF (quæ erit $= \frac{pp}{8}$); 2. faciendum porrò, ut AB ad AG (*a* ad *b*) sic BH ad GI (*c* ad *bc*) &, ut AB ad AK (*a* ad *c*) sic BH ad KL (*c* ad *cc*) duæque quantitates inventæ GI & KL (*bc* & *cc*) in Summam collectæ darent quantitatem $q = $ MN, cujus dimidium MO exprimet quantitatem $\frac{q}{2}$ in regula extantem, & à prioribus $\frac{a}{2} + \frac{pp}{8}$ subtrahendam. Pro determinanda igitur actu ipso quantitate AD, non in axe, sed in alia diametro, descriptæ parabolæ, n. 3. (quoniam quantitas

p in

p in æquatione habetur) factâ perpendiculari ad axem $aE = \frac{p}{4}$ h. e. lineæ BE n. 2. & ex E ductâ EA parallelâ axi, secundùm formulam nostram AD ex n. 1. transfertur solùm in diam. parabolæ n. 3. ex A in D, aut per partes $\frac{a}{2}$, h. e. $\frac{1}{2}$ LM ex A in c, & $\frac{bb}{8}$, h. e. $\frac{1}{2}$ CF in 1. ex c in D. Secundùm Backeri formulam autem, primò ex A in 1 ponendum est $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ LM, n. 1. secundò ex 1 in 2 quantitas $\frac{p^2}{8}$ = CF, n. 2. tertiò ex 2 in 3 retrò quantitas subtrahenda $\frac{q}{2}$ = MO n. 2; quo facto determinatum fuerit punctum D.

[*Patet ex comparatione duorum horum construendi modorum, formulas nostras Backerianis haut inutiliter adjungi; siquidem ex nostra quantitas AD multò compendiosiùs habebatur quàm ex Backeriana, idemq; imposterum haut raro continget. Ubi hæc utilitas cessaverit, illa saltem altera non spernenda est, quòd, si quantitates AD & DH secundùm utrumq; modum determinatæ coinciderint (id quod in præsenti casu ex voto contigit) de constructionis veritate possimus esse tantò magis indubii.*]

II. Pro DH ex formula nostra in perpendicularem ex D sinistrorsum erectam ponen-

da est ex D in e, in ipsum axem hic incidens quantitas $\frac{b+2c}{4}$ = BE n. 2. Deinde pro quantitate $\frac{b^3}{16}$ faciendum n. 4. ut a ad $\frac{1}{4}bb$ (LM ad LN) sic $\frac{1}{4}b$ ad $\frac{b^3}{16}$ (MO ad NP) & hæc quantitas in perpendiculari ad Diam. porrò ponenda ex e in f. Tertiò pro quantitate $\frac{bbc}{8}$ ulteriùs faciendum eod. n. 4. ut a ad $\frac{1}{4}bb$ (LM ad LN) sic $\frac{1}{2}c$ ad quartam (MQ ad NR) porrò ponendam ex f in g. Denique quantitas $\frac{bc+cc}{2}$ (quæ est = MO n. 2.) retrò ponenda est (utpote subtrahenda) ex g in H, quod est centrum quæsitum. Ex Backeriana formula similiter primò ex D in 1 usque ad axem ponitur $\frac{p}{4}$ = BE. Secundò pro quantitate $\frac{p^3}{16}$ fit, n. 4. ut a ad $\frac{p^2}{8}$ (LM ad LS = CF n. 2.) sic $\frac{p}{2}$ ad quartam (MT = AC n. 2. ad SV) & hæc SV porrò ponitur (*n. 3.*) ab 1 in 2. Tertiò fit in eadem Fig. n. 4. pro quantitate $\frac{pq}{4}$, ut a ad $\frac{p}{2}$ (LM

ad

ad MT) sic $\frac{q}{2}$ ad quartam (LX ad XZ) & hæc XZ retrò ponitur (*n.3.*) à *z* in *3* qui præcisè coincidit cum puncto *g*. Deniq; quantitas residua $\frac{q}{2}$ (= MO n. 2. atque adeò per proximè-superiora præcisè coincidens cum intervallo *g* H) retrò ponitur à *g* in H, centrum quæsitum.

[*Patet hîc iterum formulam Backeri paulò plus operæ postulare quàm nostram; quamvis utraq; accuratè conspirent, imposterum una plerumq; adhibenda, quamvis opere ipso potiùs in figuris, quàm verborum eâ prolixitate, quâ hîc semel uti voluimus, ut esset exemplar constructionum sequentium.*]

Invento sic alterutra, sive utrâque, ratione centro H, indeque per verticem parabolæ A descripto circulo, intersectio N dabit perpendicularem ad Diametrum NO, valorem quantitatis *x* desideratum.

PROBLEMA IV.

D*Atum angulum NOP, vel arcum datum NQTP* (Fig. LI. n. 1.) *in tres partes æquales dividere*; h. e. dató vel assumpto pro lubitu radio NO, & consequenter etiam subtensâ arcûs NP datâ, invenire NQ subtensam tertiæ partis dati arcûs.

SOLUTIO.

SI NO sumatur pro unitate, & NP = q, NQ verò supponatur = z; ductâ QS parallelâ cum TO, habebimus tria triangula NOQ, QNR & RQS inter se similia. Cùm enim angulus QOP sit duplus anguli QON, idemque (tanquam ad centrum) duplus etiam anguli ad peripheriam QNR; erit hic æqualis angulo QON. Sed angulus ad Q est communis utrique triangulo: Ergo tota sunt æquiangula, & consequenter crura NQ & NR inter se quoque æqualia, sicut NO & QO; & ob rationem similem etiam PY & PT. Quod si ergo ad RY accederet RS, linea NP cum hac accessione esset tripla lineæ NQ; dabitque adeò æquationem, modò RS fuerit determinata; id quod fiet mediante Δ QRS, simili duobus prioribus NOQ & QNR; siquidem angulus RQS æqualis alterno QOT = QNR, & angulus ad R communis triangulis QNR & RQS &c. Quamobrem erit,

ut NQ ad NQ sic NQ ad QR
1 — z — z — zz;

Et ut NQ ad QR sic QR ad RS
z — zz — zz — $\frac{z^4}{z}$
(h. e. z^3.

Ergo

Ergo secundùm superiùs dicta

$q + z^2 = 3z$; & subtrahendo q

$z^2 = 3z - q$; sive

$z^2 - 3z + q = 0$.

Ergo regula centralis erit (supponendo unitatem NO unâ pro latere recto)

$\frac{L}{2} + \frac{q}{2} = AD$ h. e. ex $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ i. e. 2 NO formulâ (= AD nostra, & $\frac{q}{2}$ = DH.

& $\frac{r}{2}$ = DH.

Constructio geometrica: Descriptâ ritè parabolâ (*num. 2. Fig. LI.*) sumatur in ejus axe (quia deficit in æquatione quantitas p) AD = 2 NO, & ex D erectâ perpendiculari = NP usque in H; hoc erit centrum, ex quo descriptus per A circulus parabolam tribus locis secando, dabit radices æquationis tres, nimirum NO & *no* veras, quarum prior quantitatem quæsitam NQ (*n. 1.*) exprimet, posterior lineam NV subtensam tertiæ partis complem. arcûs dati; MO verò falsam, quæ prioribus simul sumptis æqualis est: omnia ut apud Cartes. p. 91. sed hîc paulò planiora.

PROBLEMA V.

D*Atis tribus lateribus quadrilateri semicirculo inscribendi, AB, EC, CD* (Fig. LII. n. 1.) *invenire quartum latus, quod sit ipsa Diameter AD.*

SOLUTIO.

SI rem, tanquam factam, utcunque nobis præsentemus, & AB dicamus a, BC $= b$ CD $= c$, AD verò $= y$; habebimus 1. in △ rectangulo ABD, □ BD $= yy - aa$; &, (cùm in △ obtusangulo BCD, □ BD sit $=$ □□ BC + CD + 2 ▭ ex BC in CE,) si duo illa □□ BC + CC (h. e. $bb + cc$) subtrahamus ex □ BD ($yy - aa$) habebimus 2. $yy - aa - bb - cc =$ dictis duobus rectangulis ex BC in CE. Sed hæc duo rectangula possunt etiam 3. aliter haberi, si determinatum fuerit aliunde segmentum CE; id quod fit ope △△ ABD & CED similium [Nam anguli ad B & E recti sunt, ECD & BAD æquales, siquidem uterque cum eodem tertio BCD facit duos rectos] inferendo nimirum:

Ut DA ad AB sic DC ad CE.

$$y \text{ — } a \text{ — } c \text{ — } \frac{ac}{y}$$

Multiplicato enim nunc CE $= \frac{ac}{y}$ per BC $= b$, ▭ ex BC in CE erit $= \frac{abc}{y}$, & duo talia $\frac{2abc}{y}$.

Ergo

Ergo jam $yy - aa - bb - cc = \frac{2abc}{y}$; &

multipl. per y,

$$\left.\begin{matrix} y^3 * - aa \\ - bb \\ - cc \end{matrix}\right\} y = 2abc;$$ h. c. Cartesii Backeriq; formulâ.

$$\left.\begin{matrix} y^3 * - aa \\ - bb \\ - cc \end{matrix}\right\} y - 2abc = 0.$$

Regula centralis igitur erit (supposita eadem quantitate v. g. a pro unitate & latere recto)

$\frac{L}{2} + \frac{q}{2} = AD$ &

$\frac{r}{2} = DH$, h. c. secundum formulam nostram,

$\frac{a}{2} + \frac{aa + bb + cc}{2}$ i. e. $a + \frac{bb + cc}{2} = AD$, &

$\frac{2abc}{2}$ i. e. $bc = DH$.

Constructio geometrica, quæ, sine verborum ambagibus, ex formula nostra nitetur seqq: In Fig. LII. n. 2, est

LM = a n. 3. AC = LM ex n. xci
MN & LP = b 1, 2 = ½ PQ
PQ = bb. 2, 3 = ½ ST
LS & MO = c DH = PR.
PR = bc MO & *mo* duæ falsæ radices
ST = cz. NO radix vera, super qua descripto semicirculo quadrilaterum facilè absolvitur. Juxta Backeri formulam, pro AD fieret num. 3. primùm AC = ½ LM, deinde *e* D = $\frac{q}{2}$ = VX, dimidiæ lineæ VZ, quæ composita est ex LM, PQ & ST: DH verò æquatur PR ut suprà.

PROBLEMA VI.

D*Atis pro formando triangulo rectangulo minore latere, BA* (Fig. LIII. n. 1.) *& differentiâ segmentorum baseos, invenire differentiam laterum, adeoq; totum formari triangulum.* Si rem utcunque repræsentemus, tanquam jam factam, datis AB & EC quæretur FC.

SOLUTIO.

SIt AB = *a*, & EC = *b*, FC verò *x*; erit BC = *a* + *x*. Ergo □ AC 2*aa* + 2*ax* + *xx*, & linea AC √2*aa* + 2*ax* + *xx* & AE √2*aa* + 2*ax* + *xx* — *b*. Jam igitur facti

factum ACE, h.e. $\sqrt{2aa+2ax+xx}$ multiplicatum per b, sive $\sqrt{bb}$, h.e. $\sqrt{2aabb+2abbx+bbxx}$, est = facto GCF [est autem GC = $2a+x$] i.e. $2ax+xx$, per Consf. 1. Prop. XLVII. Lib. I. Mathes. Enucl. & multiplicando utrinq; quadratè,

$$2aabb+2abbx+bbxx = 4aaxx+4ax^3+x^4$$

& ordinatis transponendo decenter omnibus,

$$x^4+4ax^3+\begin{matrix}4aa\\-bb\end{matrix}xx-2abbx-2aabb=0$$

(p) (q) (r) (S)

Ergo (sumendo a pro 1 & latere recto parabolæ) regula centralis erit:

$$\frac{L}{2}+\frac{p^2}{8}-\frac{q}{2}=AD$$

& $\frac{p}{4}+\frac{p^3}{16}-\frac{pq}{4}-\frac{r}{2}=DH$, h.e. secundum formulam & reductionem nostram,

$$\frac{a}{2}+\frac{16aa}{8}-\frac{4aa+bb}{2} \text{ i.e. } \frac{a}{2}+\frac{bb}{2}$$

(= AD & a = DH.

Constructio geometrica, primùm ex formula nostra, cujus compendiosa via hîc inprimis elu-

elucescet. Requirit enim non nisi unicam præparationem n. 2. in qua LM = a, MN & LO = b, OP = bb qua præmissâ, & Diametro A y (quia quantitas p adest in æquatione) decenter constitutâ (n. 3.) fit A I = $\frac{1}{2}$ LM, & I, 2 vel I D = $\frac{1}{2}$ OP; DH verò = LM. Cæteris igitur decenter peractis, quæ postulat quantitas S in præsenti æquatione occurrens, juxta præcepta ultima Introductionis nostræ, habebitur NO valor ipsius x quæsitus; Unde (n. 4.) intervallo AB descripto circulo, & ad B constituto angulo recto, si FC fiet = inventæ NO. habebitur △ ABC desideratum, & EC reperietur præscriptæ sub initium magnitudinis.

Quod si pro centro H inveniendo agendum esset ex formula Backeriana sine nostra reductione, 1. ponenda esset (n. 5.) ab A in c $\frac{1}{2}$ AB. 2. pro quantitate $\frac{p^2}{8}$ faciendum ut 1 ad $\frac{p}{2}$ sic $\frac{p}{4}$ ad quartam, quæ foret = 2 AB f. 2 LM, & ponenda porrò à c in d. 3. quantitas $\frac{q}{2}$ (cui obtinendæ ex quadrupla LM demenda esset OP n. 2. & residua dividenda bifariam) retrò ponenda ex d in e, punctum D sic determinando. 4. in perpendicularem ex D erectam transferenda ex D in f quantitas $\frac{p}{4}$, quæ hic præcisè est = LM. 5. pro quantitate $\frac{p^3}{16}$ faciendum, ut 1 ad $\frac{p^2}{8}$

(= 2

($= \frac{2AB}{2LM}$) sic $\frac{p}{2}$ (itidem $= \frac{2AB}{2LM}$) ad quartam, ipsius LM quadruplam; & hæc porrò sinistrorsum exporrigenda ab f in punctum g (quod charta hîc non capit). 6. pro quantitate $\frac{pq}{4}$, faciendum, ut 1 ad $\frac{p}{2}$ sic $\frac{q}{2}$ ad quartam (quæ foret = quadruplæ LM, sed demptâ OP) ponendam retrò ex g in h. 7. Denique quantitas $\frac{r}{2}$ (= OP) ex h retrò sive dextrorsum posita in i, datura demum esset punctum H desideratum.

Alia SOLUTIO *ejusdem Problematis.*

POterit idem problema faciliùs solvi, dabitque æquationem multò simpliciorem, si quæratur, non FC, sed AE. Sit igitur AE (*n.1.Fig.LIII.*) $= x$, cætera ut suprà; erit AC $= x + b$, ejusque □ $xx + 2bx + bb$: Ergo □ BC $= xx + 2bx + bb - aa$: Ergo □ Tangentis HC $= xx + bx + bb - 2aa$. Sed rectangulum ACE erit $bb + bx$. Ergo per Prop. XLVII. Lib. I. Mathes. Enucl.

$$xx + 2bx + bb - 2aa = bb + bx$$

& tollendo dextra omnia

$$xx + bx - 2aa = 0, \text{ sive}$$

$xx =$

$xx = -bx + 2aa$. Ergo per Caſ. 2. quadratic. affectar.

$$x = -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + 2aa}.$$

Constructio geometrica ſecundùm regulas quadraticarum exhibetur Fig. LIV. n. 1. prout attendenti patet. Deſcripto igitur circulo intervallo BA, ſive id ſeorſim fiat ex centro arbitrario, *(Vid. n. 4. Fig. LIII.)* ſive ſuper inventâ AE Fig. præſentis intervallo dicto interſectione factâ in B; & applicatâ decenter AE, productâque donec EC ſit æqualis datæ b, tandemque ductâ BC, habebitur triangulum ad B rectangulum; & unà differentia laterum FC.

Breviùs & concinniùs: Determinata per circellum AE *(Fig. LIV. n. 1.)* prolongetur usque ad oppoſitam partem circumferentiæ in C, ducanturq; AB & CB. Sicut enim radius circelli eſt $\tfrac{1}{2}b$, ſic EC eſt $= b$.

Quod ſi placeat ex Backeri regula (ut ejus univerſalitas in quadratis etiam exemplo quodam confirmetur) Æquationem ſuperiorem

$$x^2 + bx - 2aa = 0$$

conſtruere, Regula centralis erit (ſumendo a pro 1 & L. R.)

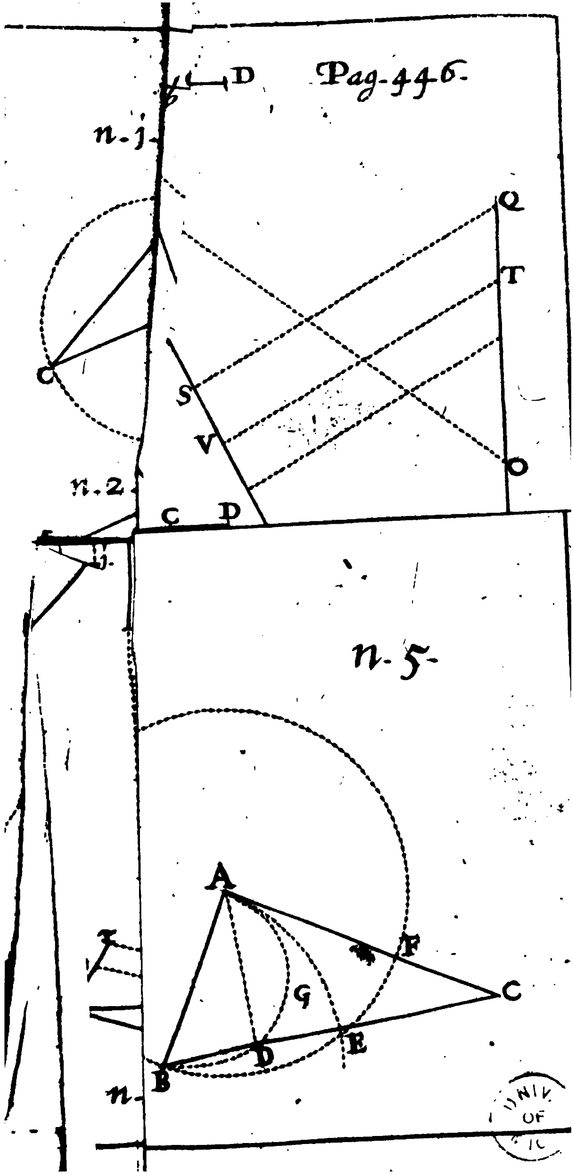
$$\frac{L}{2} + \frac{p^2}{8} + \frac{q}{2} = AD$$

$$\& \ \frac{p}{4} + \frac{p^3}{16} + \frac{pq}{4} = DH. \text{ h. e. per noſtram}$$

reductionem,

$\frac{at}{1}$

Pag. 446.



$\frac{a}{2} + \frac{bb}{8} + aa$ h. e. $1\frac{1}{2}a + \frac{bb}{8} = AD$

& $\frac{b}{4} + \frac{b^3}{16} + \frac{2aab}{4}$ h. e. $\frac{3b}{4} + \frac{b^3}{16} = DH.$

Constructio igitur ipsa in his consistit: LM (n. 2. *Fig. LIV.*) = *a*, MO = $\frac{1}{2}b$, LP = $\frac{1}{4}b$, Ergo PR = $\frac{bb}{8}$: MN = PR f. $\frac{bb}{8}$ Ergo PQ = $\frac{b^3}{16}$. In Fig. LIII. n. 3. *a* C = $\frac{1}{2}b$, A 1 = 1½ LM, 1, 2 vel 1 D = PR; D 1 = LP + MO, 1, 2 vel 1 H = PQ. Ex H per A ducto circulo habetur radix vera NO = quæsitæ AE, MO verò radix falsa.

NB. *Patet hinc, unius Problematis plures dari Solutiones & Constructiones; alias faciliores & simpliciores, alias compositas magis & laboriosas; prout nimirum quantitas incognita fuerit commodiùs aut incommodiùs assumpta: id quod hoc loco tyrones monuisse haut inutile fuerit.*

PROBLEMA VII.

D*Atam rectam B D* (Fig. LV.) *utcunque divisam in A, iterum secare in C, ut sit quadratum B A ad quadratum AC, sicut AC ad CD.*

SOLUTIO.

Cùm segmenta prima BA & AD data sint, vocetur prius a, posterius b, quæsitum AC verò dicatur x; eritque CD $=$ $b-x$. Jam ergo cùm supponatur fore

ut □ AB ad □ AC sic AC ad CD
aa — xx — x — $b-x$

erit $aab - aax = x^3$ sive translatis dextrorsum sinistris,

$$x^3 * aax - aab = o.$$

Erit igitur (si a sumamus pro 1 & L. R.) reg. centralis:

$$\frac{1}{2} - \frac{q}{2} = AD.$$

& $\frac{r}{2} =$ DH. h. e. ex formula nostra,

$\frac{a}{2} - \frac{aa}{2}$ i.e. $o =$ AD, ut D incidat in parabolæ verticem;

& $\frac{aab}{2}$ i.e. $\frac{b}{2} =$ DH.

Constructio igitur simplicissima, prout ex Fig. LV. patet.

PRO-

PROBLEMA VIII.

D*Atur operis cornuti* (quod ruditer interim repræsentamus n. 1. Fig. LVI.) *delineandi linea capitalis AB & collum AD, itemq; portio lineæ defensionis stringentis EF, quæruntur q; facies BE, ala DE, chorda seu cortina DF, nec non angulus propugnaculi ABE &c. totaq; adeò operis cornuti delineatio.* Patet autem, si habeatur ala DE vel cortina DF, cætera ultrò consequi. Sint ergò datæ, capitalis AB, & collum AD, & portio lineæ defensionis EF eâ magnitudine, quâ dextrorsum literis *a, b, c* notatæ sunt.

SOLUTIO.

SIt AB = *a*, AD = *b*, & EF = *c*, DF verò = *x*; erit AF = *x* + *b*, & propter similitudinem ΔΔ BAF & EDF & ECB,

ut FA ad AB sic FD ad DE

$x+b$ — a — x — $\frac{ax}{x+b}$

Jam verò □□ DF + DE sunt = □ EF, h. e. $\frac{aaxx}{xx+2bx+bb} + xx = cc$; sive, revocando sinistra omnia ad eandem denominationem,

$$\frac{x^4 + 2bx^3 + \begin{matrix} aa \\ +bb \end{matrix} xx}{xx + 2bx + bb} = cc;$$

& multiplicando utrobique per $xx + 2bx + bb$,

$$x^4 + 2bx^3 + \begin{matrix} aa \\ +bb \end{matrix} xx = ccxx + 2bccx + bbcc;$$

& translatis dextris omnibus per signa contraria in sinistram

$$x^4 + 2bx^3 + \begin{matrix} aa \\ +bb \\ -cc \end{matrix} xx - 2bccx - bbcc = 0.$$

Erit igitur (ponendo a pro 1 & L. R.) Regula centralis:

$\frac{L}{2} + \frac{p^2}{8} + \frac{q}{2}$ (quia quantitas q in aequatione est privativa, nam cc majus est quàm $aa + bb$) $=$ AD.

& $\frac{p}{4} + \frac{p^3}{16} + \frac{pq}{4} - \frac{r}{2} =$ DH;

Vel secundùm reductionem nostram,

$\frac{a}{2} + \frac{bb}{2} + \frac{cc - aa - bb}{2}$ h.e. $\frac{cc}{2} =$ AD.

& $\frac{2b}{4} + \frac{8b^3}{16} + \frac{2bcc - 2aab - 2b^3}{4} - \frac{2bcc}{2}$

h.e.

h.e.

$$\frac{b}{2}+\frac{b^3}{2}+\frac{bcc-aab-b^3-bcc}{2} \text{ h.e.}$$

$$0-\frac{bcc}{2} = DH.$$

Constructio geometrica igitur ex formula nostra non poscit aliam præparatoriam determinationem quàm quantitatum $\frac{cc}{2}$ pro AD, $\frac{bcc}{2}$ pro DH ad centrum, & $bbcc$ ad radium circuli determinandum; quas quidem n. 2. Fig. LVI. exhibet: Nimirum NP est = cc, RS = bcc, RV = $bbcc$, inventæ mediantibus LM = a; LR = b, LN & MO = c, MQ = NP & MT = RS. Descriptâ igitur n. 3. parabolâ, in diametrum ejus ritè ductam (quia quantitas p in æquatione adest) transferatur AD = $\frac{1}{2}$ NP., & ex D in H perpendiculariter, & hîc quidem dextrorsum, (quia DH = $-\frac{bcc}{2}$) $\frac{1}{2}$ RS; ita habebitur centrum H: per quod ductâ KAI, ita ut AK sit = quantitati $bbcc$ sive S, h.e. RV &c. descriptus intervallo HL circulus secabit parabolam in M & N, eritque applicata NO magnitudo cortinæ DF quæsita; super qua n. 4. designato operis cornuti ambitu ope datarum AB & AD, deprehendetur

lineam EF provenire eâ magnitudine quæ suprà erat supposita.

Quod si Backerianâ methodo negotium idem expedire quis tentaverit, designando primùm intervallum $Ab = \frac{L}{2}$ deinde porrò ponendo $bc = \frac{p^2}{8}$ & tandem cd pro quantitate $\frac{q}{2}$; incidet in idem punctum D; Et similiter partes regulæ centrales reliquas expresserit intervallis De, ef, fg & ultimâ retrò ponendâ gh, in idem centrum H: sed profectò, & labore tot quantitatum determinandarum multò majore, & errandi periculo manifestiore ex tot particulis separatim resecandis; prout experientia testabitur, ita reductionis nostræ utilitatem argumento novo comprobatura.

Alia SOLUTIO *ejusdem Problematis.*

SI cæteris omnibus manentibus (datis tamen lineis AB, AD & EF n. 1. Fig. LVI. assumptis dimidio minoribus, ut Schema Constructionis minus spatium postulet) BE ponatur $= x$, tanquam incognitum primarium; erit $BF = x + c$, ejusq; $\square\ xx + 2cx + cc$: Et, cùm sit,

ut

ut BE ad BC = AD sic BF ad AF
x — b — $-x+c$
quartum, erit AF = $\frac{bx+bc}{x}$, ejusque quadratum = $\frac{bbxx+2bbcx+bbcc}{xx}$. Hoc igitur quadratum si subtrahatur ex quadrato BF, relinquetur quadratum BA h. e. $xx+2cx+cc\,\frac{-bbxx-2bbcx-bbcc}{xx}=aa$; h. e. reductis omnibus ad eandem denominationem, $x^4+2cx^3+\begin{matrix}cc\\-bb\end{matrix}\,xx-2bbcx-bbcc=aaxx$; vel secundum formulas Cartesii & Backeri,

$$x^4+2cx^3+\begin{matrix}cc\\-aa\\-bb\end{matrix}\,xx-2bbcx-bbcc=0.$$

Regula centralis igitur (iterum ponendo a pro 1 & L) erit:

$$\frac{L}{2}+\frac{p^2}{8}-\frac{q}{2}=AD;$$

$$\&\ \frac{p}{4}+\frac{p^3}{16}-\frac{pq}{4}-\frac{r}{2}=DH.$$

Vel per reductionem nostram

$$\frac{a}{2}+\frac{cc}{2}-\frac{cc+aa+bb}{2}\ \text{h. e.}\ a+\frac{bb}{2}=AD$$

 & $\frac{c}{2}$

& $\frac{c}{2} + \frac{c^3}{2} - \frac{c^3 + aac + bbc - bbc}{2}$ h.e.

$c - \frac{bbc}{2} = DH.$

Constructio geometrica: Descriptâ igitur decenter parabolâ (*Fig. LVI. n. 5.*) & accommodatâ diametro A y, fit A 1 $= a$ & 1, 2 $= \frac{bb}{2}$, sic habetur punctum D: fit porrò D 3, vel 2, 3 $= c$, & retrò 3, 4 $= \frac{bbc}{2}$ (quantitatum verò harum $\frac{bb}{2}$ & $\frac{bbc}{2}$ geometricam determinationem, utpote facillimam, noluimus hîc exprimere) & habetur punctum H &c. Provenit autem quantitas quæsita: N O; quæ cùm æquetur dimidiæ B E n. 4. confecta res erit; quam eandem dabit Backeriana formula, sed viâ paulum longiore.

PROBLEMA IX.

PRo triangulo *A B C quocunq;* (cujus imaginem quodammodo sistit num. 1. Fig. LVII) *dantur perpendicularis A D, ac differentia lateris minimi à duobus cæteris, E C & F C, quæruntur q; omnia tria latera,* h. e. principaliter latus minimum AB, quo invento reliqua quoq; nota sunt.

SOLU-

SOLUTIO.

Sit AD $= a$ EC $= b$ & FC $= c$, AB $= x$; erit BC $= x + b$ ejusque quadratum $xx + 2bx + bb$, & AC $= x + c$, ejusque □ $xx + 2cx + cc$; BD verò $\sqrt{xx - aa}$ & DC $\sqrt{xx + 2cx + cc - aa}$. Potest autem □ BC aliter etiam haberi, & sic æquatio, si □□ BD + DC + 2□ ex BD in DC addantur in unam Summam, juxta Prop. IV. Lib. II. Euclid. nimirum

$$2xx + 2cx + cc - 2aa + \sqrt{4x^4 + 8cx^3 + 4ccxx - 8aaxx - 8aacx + 4a^4 - 4aacc}$$

erunt $= xx + 2bx + bb$;

[Nam DC $= \sqrt{xx - aa + 2cx + cc}$ multiplicatum per BD $\sqrt{xx - aa}$ dat rectangulum segmentorum

$$\sqrt{x^4 + 2cx^3 + ccxx - 2aaxx - 2aacx + a^4 - aacc}$$

& hoc geminatum, h.e. per $\sqrt{4}$ multiplicatum, dat quantitatem illam, quæ in æquatione sub signo radicali continetur.]

Ergo translatis omnibus sinistris, quæ sunt ante signum $\sqrt{}$, in partem dextram per signa contraria, erit

$$\sqrt{4x^4 + 8cx^3 + \left.\begin{matrix} +4cc \\ -8aa \end{matrix}\right\} xx - 8aacx + 4a^4 - 4aacc}$$

$$= -xx \begin{matrix} +2b \\ -2c \end{matrix} x + bb - cc + 2aa$$

& vinculum à sinistris tollendo, dextra verò quadratè multiplicando,

$$4x^4 + 8cx^3 \begin{matrix} +4cc \\ -8aa \end{matrix} xx - 8aacx + 4a^4 - 4aacc$$

$$= x^4 \begin{matrix} +4c \\ -4b \end{matrix} x^3 \left.\begin{matrix} -4aa \\ +2bb \\ +6cc \\ -8bc \end{matrix}\right\} xx \left.\begin{matrix} +4b^3 \\ +4c^3 \\ +8aab \\ -8aac \\ -4bbc \\ -4bcc \end{matrix}\right\} x \begin{matrix} +4a^4 \\ +b^4 \\ +c^4 \\ +4aabb \\ -4aacc \\ -2bbcc \end{matrix}$$

additisque & sublatis utrinque quæ possunt, $3x^4 + 4cx^3 - 4aaxx$

$$= -4bx^3 \left.\begin{matrix} +2bb \\ +2cc \\ -8bc \end{matrix}\right\} xx \left.\begin{matrix} +4b^3 \\ +4c^3 \\ +8aab \\ -4bbc \\ -4bcc \end{matrix}\right\} x \begin{matrix} +b^4 \\ +c^4 \\ +4aabb \\ -2bbcc \end{matrix}$$

& transferendo omnia dextra

$$3x^4 \left.\begin{matrix} +4b \\ +4c \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} -4aa \\ -2bb \\ -2cc \\ +8bc \end{matrix}\right\} xx \left.\begin{matrix} -4b^3 \\ -4c^3 \\ -8aab \\ +4bbc \\ +4bcc \end{matrix}\right\} x \begin{matrix} -b^4 \\ -c^4 \\ -4aabb \\ +2bcc \end{matrix} = 0.$$

Et di-

Et dividendo omnia per 3

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + \frac{4}{3}b \\ \quad + \frac{4}{3}c \end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{l} - \frac{4}{3}aa \\ - \frac{2}{3}bb \\ - \frac{2}{3}cc \\ + 2\frac{2}{3}bc \end{array}\right\} xx \left.\begin{array}{l} - \frac{4}{3}b^3 \\ - \frac{4}{3}c^3 \\ - 2\frac{2}{3}aab \\ + \frac{4}{3}bbc \\ + \frac{4}{3}bcc \end{array}\right\} x \begin{array}{l} - \frac{1}{3}b^4 \\ - \frac{1}{3}c^4 \\ - \frac{4}{3}aabb \\ + \frac{2}{3}bbcc \end{array} = 0.$$

Nota: quaesivi hanc aequationem etiam alio gemino modo; 1. per comparationem quadrati AC cum duobus quadratis AB + BC, post 2 □ CBD inde subtracta, juxta Prop. 13. Lib. II. Euclidis, quae est ... : Lib. I. Mathes. Enucl. inveniq; prorsus eandem cum praesenti: 2. ponendo sub initium y pro x + b & z pro x + c, & caetera peragendo ut in prioribus modis, donec prodiret haec aequatio,

$$\left.\begin{array}{l} x^4 - 2x^2 \\ \quad + 4aa \end{array}\right\} yy \left.\begin{array}{l} - 2x^2 \\ - 2y^2 \end{array}\right\} zz \begin{array}{l} + y^4 \\ + z^4 \end{array} = 0$$

in qua cùm postea substituerem valores respondentes quantitatibus yy, zz &c. prodiit eadem haec aequatio ultima paulò faciliùs, sed (NB.) signis omnibus ubiq; contrariis.

Jam pro regula centrali ritè formanda & constructione geometrica inde perficienda, determinandae veniunt ante omnia singulae quantitates p, q, r & S, ut constet, privativae sint, an positivae? Reperientur autem (*n. 2. Fig. LVII.*) p = G2 positiva, q = H4 privativa, I5 = r privativa, & K4 = S, pariter privativa; idque ope

quantitatum, LM = b vel 1, MN & LO = a, OP = aa, MQ & LR = c, RS = cc, LT quoque = cc, TV & LX = c^3, XY = c^4. Formula igitur æquationis ultimæ similis est huic, $x^4 + px^2 - qxx - rx - S = o$, adeoq; regula centralis (sumendo hic b pro 1 & latere recto)

$$\frac{L}{2} + \frac{p^2}{8} + \frac{q}{2} = AD$$

$$\& \frac{p}{4} + \frac{p^3}{16} + \frac{pq}{4} - \frac{r}{2} = DH.$$

Quare, descriptâ nunc parabolâ (uti videre est n. 4.) in diametrum Ay decenter inventam transferatur primò Ab = ½ LM (*n.* 2.) deinde bc = OP (*n.* 3.) h. e. $\frac{p^2}{8}$; & tertiò cD = $\frac{q}{2}$ h. e. ½ H4 (*n.* 2.) Porrò ex D in e ponatur MN (*n.* 3.) = $\frac{p}{4}$, & ex e in f, QX = $\frac{p^3}{16}$, & ex f in g SZ = $\frac{pq}{4}$; ex g verò retrò in H, dimidia quantitas r, sive I5 (*n.* 2.) factisque pro more cæteris, habebitur NO, latus trianguli describendi quæsitum; cujus adeò dolinea-

lineatio (*n*. 5.) facilis est, omnibus tribus lateribus jam notis. Examinis interim loco foret hæc, si super AB = NO descripto semicirculo AGB, applicaretur data AD, & ex B per D duceretur indefinita BDC: deinde intervallo AB, descriptis arcubus AE & BF, resectæ BE adderetur data EG: sic enim, junctis A & C punctis, debet FC æqualis esse superiùs datæ FC.

Scholium.

Reductionem nostram hac vice prætermisimus, quia non sine tædio, hîc fit, & quantitates AD ac DH (præsertim posteriorem) terminis satis prolixis exprimit. Nam AD proveniret $= \frac{b}{2} +$ $\frac{5}{9}bb + \frac{5}{81}cc - \frac{8}{9}bc + \frac{2}{3}ca$ (quia scil. $\frac{p^2}{8} =$ reperitur $\frac{2}{9}bb + \frac{4}{9}bc + \frac{2}{9}cc$, & $\frac{q}{2}$ in se $= \frac{2}{3}aa - \frac{1}{3}bb - \frac{1}{3}ac + \frac{4}{9}cc$, hic verò [ubi vi centralis regulæ positivè accipitur, cùm in se sit privativa] sub signis contrariis, $= + \frac{2}{3}aa + \frac{1}{3}$ ſ. $\frac{3}{9}bb + \frac{1}{3}$ ſ. $\frac{2}{81}ca$ $- \frac{4}{3}$ ſ. $\frac{1}{9}^2 bc$) vel contractiùs (quia b est unitas) AD $= \frac{1}{2}b + \frac{5}{9}b$ (i. e. $1\frac{1}{18}b$) $+ \frac{5}{81}cc - \frac{8}{9}c + \frac{2}{3}aa$; quæ partes non adeò difficulter exprimerentur in diametro Ay, hujus portionibus A1; 1,2; 2,3; 3D: altera verò quantitas DH, sive centri H definitio, multas quoque ambages haberet, utpote cùm

$\frac{p}{4}$ inveniatur $= \frac{b + c}{3}$

$$\frac{p^3}{16} = \frac{4b^3 + 12bbc + 12bcc + 4c^3}{27}$$

$$\frac{pq}{4} = \frac{6bcc + 6bbc - 4aab - 4aac - 2b^3 - 2c^3}{9}$$

$$\& \ \frac{r}{2} = \frac{2bbc + 2bcc - 4aab - 2b^3 - 2c^3}{3}$$

$$\text{sive } \frac{6bbc + 6bcc - 12aab - 6b^3 - 6c^3}{9}$$

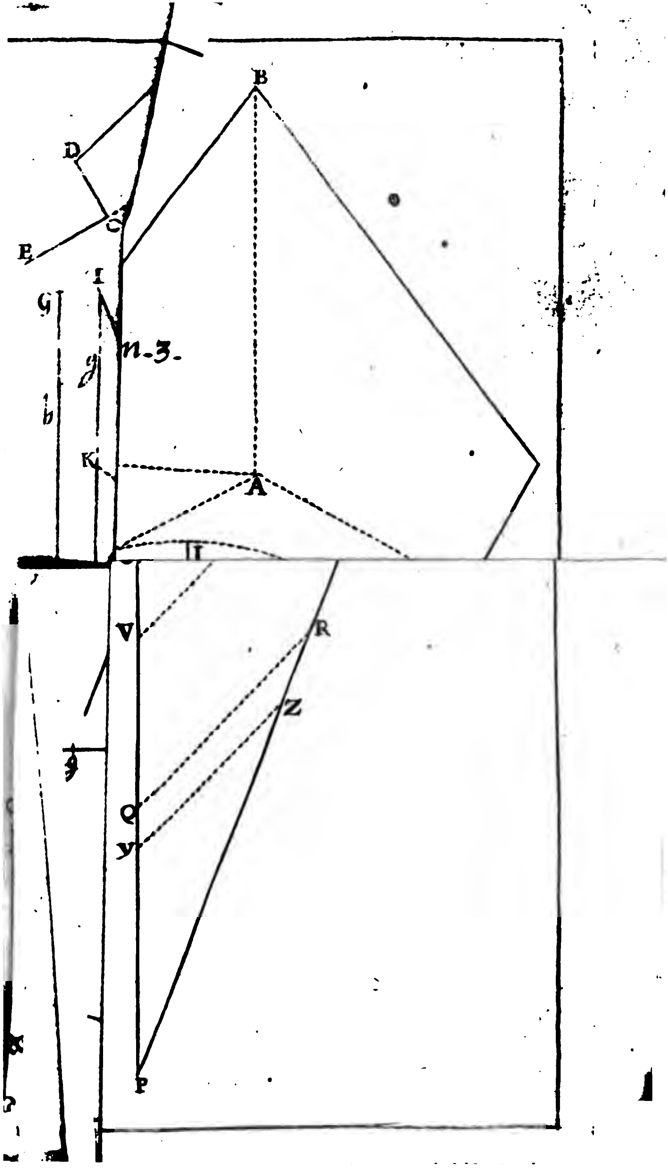
Si, quæ ex quantitatibus $\frac{pq}{4}$ & $\frac{r}{2}$ (cùm hæc posterior subtrahenda sit, adeoque privativa, qualis est, relinquenda; illa verò, in se etiam privativa, hìc in regula centrali positivè expressa, signa omnia contraria sit habitura) se mutuò tollerent, ritè auferantur, & reliqua cum prioribus duabus quantitatibus decenter colligantur, futuris $\frac{b + c}{3}$

$$\frac{-8aab + 4aac + 4bbc + 4bcc}{9} \ \frac{-8b^3 - 8c^3}{27} = DH,$$

sive contractiùs paulò (quia b est 1) $\frac{b + c}{3}$

$$\frac{-8aa + 4aac + 4c + 4cc}{9} \ \frac{-8b - 8c^3}{27} = DH.$$

Ceterùm, si lubeat tyronibus rem hanc totam exemplo numerali illustrare & quantitatum inventarum veritatem consensumq; periclitari; ponant ex. causâ $a = 12$, $b = 1$ & $c = 2$, *ac deprehendent primò facile, quantitatem*


B
D
C
E
I
G
K
A
H
V
R
Z
Q
y
P

utem *p* in *æquatione ultima valere* † 4, *q verò*
190, *r*, −388, *S*, −195: Secundò, *in regula*
entrali Backeriana $\frac{L}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{p^2}{8} = 2$, & $\frac{q}{2} = 95$,
deoq; totam AD = $97\frac{1}{2}$; *porrò verò* $\frac{p}{4} = 1$,
$\frac{{}^3}{6} = 4$, $\frac{pq}{4} = 190$, & $\frac{-r}{2} = -194$, *adeoq;*
ptam DH = 195 − 194 i.e. = 1. Tertiò *in*
eductione nostra similiter (*si per partes Backerianis sin-*
gulis respondentes eant) $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{9}bb + \frac{4}{9}bc + \frac{2}{9}bc$
= 2, & $\frac{1}{3}aa + \frac{4}{3}bb + \frac{4}{3}cc - 4bc = 95$;
Summa pro AD $97\frac{1}{2}$; *porrò verò*, $\frac{b+c}{3} = 1$;
$\frac{4b^3 + 12bbc + 12bcc + 4c^3}{27} = 4$;
$\frac{6bcc + 6bbc - 4aab - 2b^3 - 2c^3}{9} = 190$;
& $\frac{2bbc + 2bcc - 4aab - 2b^3 - 2c^3}{3} = 194$
subtrahenda; Summa adeò pro DH = 195 − 194
= 1. *Quæ eadem quantitates* quartò *provenient*, *si*
ontractiores quantitates AD & DH, *prout suprà ex-*
pressæ literis habentur, in numeros resolvantur.

PROBLEMA X.

O*Porteat construere propugnaculum super datis polygonis* EAF (Vid. Fig. LVIII. n. 1.)

n. 1.) *cujus capitalis AB adaquet aggregatum colli & ala, harum verò quadrata addita aquentur quadrato linea data GH, & solidum ex multiplicatione quadrati ala in collum, cubo recta itidem data IK.*

SOLUTIO.

POnatur collum AC = z, cujus adeò quadratum zz subtractum ex bb □ lineæ datæ b, relinquet quadratum alæ DC = $bb - zz$. Jam igitur hoc quadratum in collum AC sive z multiplicatum dabit, $bbz - z^3 = g^3$, cubo lineæ datæ IK; & addendo utrinq; z^3, subtrahendo verò bbz $o = z^3 * - bbz + g^3$.

Ergo, si g vel IK sumamus pro 1 & L, erit g^3 ipsa linea g, &

Regula centralis: $\frac{L}{2} + \frac{q}{2} =$ AD

$$\& \frac{r}{2} = DH$$

h. e. secundùm reductionem nostram,

$\frac{g}{2} + \frac{bb}{2} =$ AD & $\frac{g}{2}$ DH.

Constructio geometrica: Descriptâ parabolâ *(n. 2. Fig. I. VIII.)* in ejus axe fit A 1 = ½ IK & 1, 2. f. 1 D = ½ MN *(ex n. 1.)* DH verò

erò $= \frac{1}{2}$ IK. Dein ex H descripto circu-
o, & inventâ radice verâ NO super dato an-
gulo EAF (*n.* 3.) fit AC = NO, & erectâ
perpendicularis CD resecatur per AD = GH
(*n.* 1.) AB verò fit = AC + CD; eritq; deli-
neatum propugnaculum quod quærebatur.

PROBLEMA XI.

Pro *triangulo rectangulo ABC* (quod in-
terim ruditer designamus num. 1. Fig.
IX.) *dato latere majore AC, & posito mi-
nore AB = segmento CE, quod resecet ex
basi BC perpendiculum ex angulo recto A de-
missum; quæruntur hæ ipsæ lineæ AB vel CE,
utrumq; adeò triangulum.*

SOLUTIO.

Sit AC = a, CE vel AB = x. Erit igi-
tur 1. $aa - xx$ = $\square$ AE: Et quia $\triangle\triangle$
BEA & CAE sunt similia, erit ut

AC ad CE sic BA ad AE,

a — x — x — $\frac{xx}{a}$

adeoq; 2. $\square$ AE = $\frac{x^4}{aa}$. Ergo

$\frac{x^4}{aa} = aa - xx$; & multipl. per aa,

$x^4 = a^4 - aaxx$;

vel

vel ſub Carteſii & Backeri formula, transferendo omnia in ſiniſtram,

$$x^4 * + aaxx * - a^4 = o. \text{ h.e.}$$

$$x^4 * + qxx * - S = o.$$

Ergo (ſumpto a pro 1 & L) regula centralis: $\frac{L}{2} - \frac{q}{2}$ h.e. o = AD

& $\frac{r}{2}$ h. e. o. = DH; ut H cadat in ipſum verticem A.

Conſtructio geometrica: Cùm a ſit aſſumptum pro unitate & L, quantitas S quoque & latus rectum, h.e. AI & AK, adeoque & media proportionalis AL & radius HL erunt = dato lateri AC, ejusque adeò intervallo, per delineatam ritè parabolam, deſcripto circulo habebitur NO valor quantitatis x h. e. lateris minoris AB. Ducta ergo NA, quæ eſt = AC per Conſtruct. ſi ad eam ſtatuatur perpendicularis AB ſecans productum NO in B, factum erit triangulum deſideratum ABC, & AB (quod erit ſolutionis probæ documentum) reperietur = NO ſive CE.

Conſtructio altera: Cùm in æquatione ſuperiùs inventa nec x^3 nec x habeatur, inſtar quadraticæ illa haberi poteſt & eodem modo conſtrui, quo ſimiles aliæ plures inter exempla IVta. Nimirum, quia

$x^4 =$

$x^4 = -aaxx + a^4$; juxta Caf. 2. quadrat. ffectarum,

$$xx = -\tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + a^4} \text{ h.e. } + \sqrt{\tfrac{5}{4}a^4},$$

$$x = \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{5}{4}a^4}}, \text{ h.e. } \sqrt{-\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{5}{4}a}}$$

Quamobrem (*n. 3. Fig. LIX.*) si AC fiat $= a$ t CD $\tfrac{5}{4}a$, media proportionalis CG erit $= \sqrt{\tfrac{5}{4}a}$, & hinc demtâ GF $= \tfrac{1}{2}a$, restabit C $= \sqrt{\tfrac{5}{4}a} - \tfrac{1}{2}a$: Inter hanc verò vel æqua-em CH, & unitatem AC, porrò inventa alia nedia proportionalis CE erit valor quæsitus ncognitæ quantitatis x, = NO (*n. 2.*)

PROBLEMA XII.

PRo triangulo rectangulo ABC (quod Fig. LX. n. 1. quodammodo interim adumbret) *detur cathetus BA, segmentum hypotenusæ BD, & segmentum baseos EC, a C usq; ad perpendicularem DE ex fine segmenti BD demissam; quærantur q; AE, DC, & consequenter basis AC & hypotenusa BC, totumq; adeò triangulum.*

SOLUTIO.

SIt AB = a, BD = b, & EC = c, DC autem = x, quo dato cætera non poterunt latere. Ergo $xx - cc$ = □ DE, Sed idem □ DE poterit haberi, si inferatur,

ut BC ad BA, sic DC ad DE,

$$b+x \quad — \quad a \quad — \quad x \quad — \quad \frac{ax}{b+x}$$

& inventa hæc quantitas DE quadratè multiplicetur: Erit enim hoc quadratum

$$\frac{aaxx}{xx+2bx+bb} = xx-cc;$$

& multiplicando utrinq; per $xx+2bx+bb$,

$$aaxx = x^4+2bx^3+bbxx-2bccx-bbcc,$$
$$-cc$$

& subtrahendo etiam $aaxx$,

$$x^4+2bx^3+bbxx-2bccx-bbcc=0.$$
$$-aa$$
$$-cc$$

Quæ æquatio (cùm bb major sit quàm aa & cc simul) refert formulam Backeri hanc:

$$x^4+px^3+qxx-r-S=0.$$

Ergo regula centralis erit (assumpto n pro L)

$$\frac{L}{2}+\frac{p^2}{8}-\frac{q}{2}=AD$$

& $$\frac{p}{4}+\frac{p^3}{16}-\frac{pq}{4}-\frac{r}{2}=DH.$$

Vel secundùm reductionem nostram,

[illegible] $\frac{a+}{2}$

$\frac{a}{2} + \frac{bb}{2} - \frac{bb + aa + cc}{2}$ h.e. $\frac{a + cc}{2}$ = AD.

$\frac{b}{2} + \frac{b^3}{2} - \frac{b^3 + aab + bcc - bcc}{2}$, h.e. $b - \frac{bcc}{2}$

(= DH.

Constructio geometrica; pro cujus funda-
ento inventæ sunt (*n*. 2.) & partim assumptæ,
M = *a*, MN & LO = *c*, OP & MQ
cc, LR = ½*b*, RS = ½*bcc*: (*n*. 3.) 𝔏𝔐
a, 𝔏𝔑 & 𝔏𝔒 = *b*, 𝔏𝔓 = *bb*, 𝔏𝔔 =
c, 𝔏𝔛 = *bbcc*. Delineatâ igitur parabolâ,
num 4.) in ipsius diametrum ritè inventam
ransferatur LM ex A in 1, & ½ OP ex 1
2 sive D; porròque BD (*ex n*. 1.) à D in
, & RS retrò ex 3 in 4 sive H, centrum
uæsitum. Factâ deinde AK = 𝔏𝔛 & cæ-
eris pro more peractis, reperietur NO valor
sius *x*, sive quantitas DC: cui si addatur
D &, super tota BC descripto semicirculo,
pplicetur BA, habebitur etiam AC totum-
ue triangulum quæsitum, ac deprehendetur
C (demisso perpendiculo ex D) æqualis ei
uæ data fuerat cognominis n. 1.

Quod si Backerianam formulam aliquis ma-
t immediatè construere, præparanda venient
lura & assumenda; nimirum (*n*. 5.) 𝔏𝔓 =
b, 𝔏𝔐 = *a* vel *aa*, 𝔐𝔔 = *cc* sive OP
n.2.) ut habeatur 𝔔𝔓 = *q*: porrò PQ =
, PR = ½*p* sive BD (*n*.1.) QS = ¼*p* sive
BD; ut RT sit $\frac{pp}{8}$ & huic = PV, ut PX

fit = $\frac{p^3}{16}$; tandemque Py = $\frac{1}{2}q$, ut PZ fit $\frac{pq}{4}$.

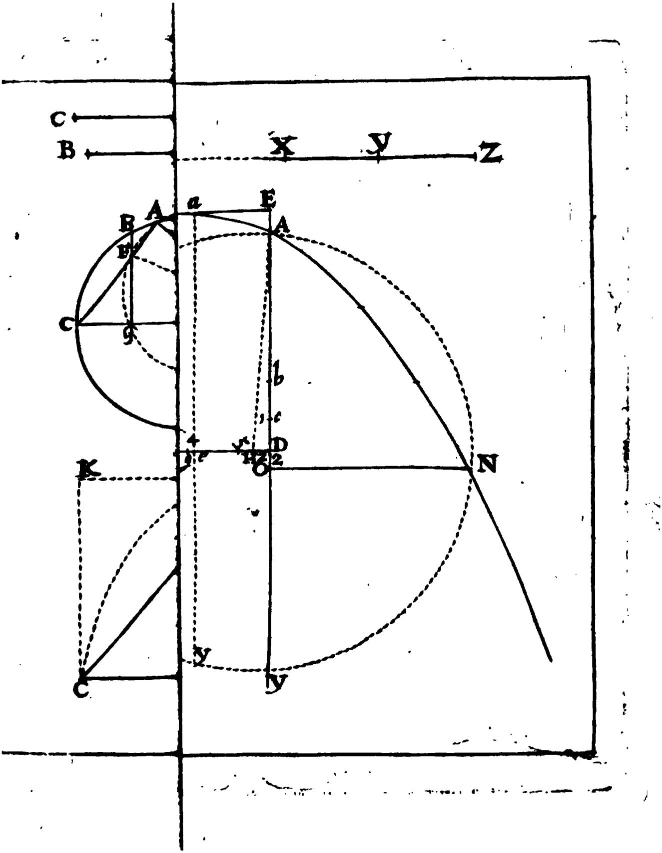
His ita præparatis, si (*n.4.*) A*b* fiat = $\frac{1}{2}$ AB (*n.1.*) *bc* = RT, & *cd* retrò = $\frac{1}{2}$ PQ; incidemus in punctum D: &, si D*e* faciamus = $\frac{1}{2}$ BD, *ef* = PX (n. 5. quod intervallum charta non capiebat) ab *f* autem retrò ponamus *fg* = PZ, & à *g* ulterius dextrorſum *gh* = 2 RS; incidemus in punctum H &c. Utra ex his duabus conſtruendi methodis & brevior ſit & in praxi tutior, experti hîc iterum judicent. Monendique ſunt inprimis tyrones, ſi conſtruere ex Backeriana præſertim formula velint, in diagrammatibus n. 3. n. 5. & ſimilibus, ut angulos PLM/ SPT adhibeant ſatis amplos; quos arctiores nos, chartæ parcentes aut veriùs tabularum ſpatio, ubique ferè admiſimus.

PROBLEMA XIII.

D*Atâ circuli diametro CD* (n. 1. Fig. LXI.) *& lineâ BG, quæ in illam demittatur perpendiculariter* (id quod interea ruditer hîc adumbramus) *invenire punctum A, è quo ducta recta AC lineam BG in F ita ſecet, ut AF, FG, GD, ſint tres continuè-proportionales.*

SOLU-

SOLUTIO.



& translatis omnibus dextrorsum,

$x^3 + bxx - ccx - bbc - bcc = 0$, h. e. formulâ Cartesianâ, $x^3 + pxx - qx - r = 0$.

 Ergo

fit = n^3 : tandemque $P\gamma = \frac{1}{2}q$, ut PZ

ta secet, ut AF, FG, GD, sint
è-proportionales.

SOLU-

SOLUTIO.

Si CF inveniatur, habetur etiam punctum A, & sectio lineæ BG est facta. Sit igitur CF $= x$, & (quia datâ perpendiculari BG necessariò dantur etiam segmenta diametri CG & GD) sit GD $= b$, CG $= c$; erit BG $= \sqrt{bc}$, & CD $= b + c$. Cùm igitur $\triangle\triangle$ CAD & CGF sint rectangula, & habeant angulum ad communem, erunt inter se similia. Ergo

ut CF ad CG sic CD ad CA

$$x \;—\; c \;—\; b + c \;—\; \frac{bc + cc}{x}$$

Ergo AF $= \frac{bc + cc - xx}{x}$, FG verò $\sqrt{xx - cc}$.

Sunt verò ex hypothesi

ut AF ad FG, sic FG ad GD

$$\frac{bc + cc - xx}{x} — \sqrt{xx - cc} — \sqrt{xx - cc} — b.$$

Ergo factum extremorum = facto mediorum

$$\frac{bbc + bcc - bxx}{x} = xx - cc,$$

& multiplicando per x,

$$bbc + bcc - bxx = x^3 - ccx$$

& translatis omnibus dextrorsum

$x^3 + bxx - ccx - bbc - bcc = 0$, h. e. formulâ Cartesianâ, $x^3 + pxx - qx - r = 0$.

 Ergo

Ergo (sumendo b pro 1 & L) regula centralis:

$$\frac{L}{2} + \frac{p^2}{8} + \frac{q}{2} = AD$$

$$\& \frac{p}{4} + \frac{p^3}{16} + \frac{pq}{4} - \frac{r}{2} = DH.$$

Vel juxta reductionem nostram,

$$\frac{b}{2} + \frac{bb}{8} + \frac{cc}{2} \text{ i.e. } \frac{5b}{8} + \frac{cc}{2} = AD$$

$$\& \frac{b}{4} + \frac{bc}{16} + \frac{cc}{4} - \frac{c - cc}{2} \text{ h.e. } \frac{5b}{16} - \frac{cc}{4} - \frac{c}{2} = DH.$$

Constructio geometrica: Descripto super data CD (*n.* 2.) semicirculo, & applicato decenter, uti figura monstrat, perpendiculo dato, BG, habebuntur segmenta diametri, GD = b & quantitati p in formula Backeriana, & CG = c, quæ (*n.* 3. ubi LM = b, LO & MN = c) dabit OP = cc & quantitati q. Quamobrem descriptâ parabolâ (*n.* 4.) & linea VZ = $2\frac{1}{2}b$, abscissâ quartâ parte XZ, & octavâ YZ (quarum hæc æquabitur $\frac{2\frac{1}{2}b}{8}$ f. $\frac{5b}{16}$, illa $\frac{5b}{8}$) si in diametrum parabolæ Ay transferatur A1 = XZ, porròque 1, 2 sive 1 D = dimidiæ OP (*n.* 3.) transversim verò D3 = YZ, & retrò 3, 4 = $\frac{1}{4}$ OP, ut & 4, 5 = $\frac{1}{2}$ CG (*n.* 2.) habebitur centrum H, & intervallo HA descripto circulo, radix NO, transferenda (*n.* 2.) ex C in F, & continuanda in

A pun-

A punctum quæsitum. In Backeriana formula (quia quantitas p est $= b$ sive 1) $\frac{p^2}{8}$ est $= \frac{b}{8}$ & $\frac{b^3}{16} = \frac{b}{16}$ & quantitas q sive $cc =$ OP (*n.* 3.) Fiant igitur in diametro parabolæ A b $= \frac{1}{2}$ GD, & $bc = \frac{1}{8}$ GD, (*n.* 2.) & cd denique $= \frac{1}{2}$ OP (*n.* 3.) & habebitur punctum D idem quod antea. Fiat porrò D$e = \frac{1}{4}$ GD & $cf = \frac{1}{2}$ GD, & mox retrò $fg = \frac{1}{4}$ OP, denique $gh = \frac{1}{2}$ CG, habebitur idem quoque centrum H, eritque observatu jucunda coincidentia partium plerarumque in utraq; formula; quod aliàs rarò contingit.

Solutiones aliæ ejusdem Problematis.

Carolus Renaldinus, è cujus Lib. II. de Resol. & Comp. Math. Problema præsens habemus, id soluturus aliâ incedit viâ, in aliud planè Problema hoc transmutans. Observat nimirum 1. angulos FAD (*Vid. n. 1. Fig. nostræ LXI.*) & FGD, cùm utriq; recti sint super communi base FD, in circulo esse. Hinc infert 2. (vi Coroll. Prop. XXXVI. Lib. III. Eucl.) ▭ DCG & ACF esse æqualia, & consequenter CD, CA, FC, CG esse quatuor continuè proportionales. Observat inde 3. GD esse excessum primæ harum proportionalium super quar-

ram CG, & AF esse excessum secundæ AC super tertiam CF; adeòque, cùm 4. rectangulum ex AF in GD sit = □ mediæ proportionalis FG (nam AF, FG, GD supponuntur esse continuè-proportionales) & hoc □ FG sit excessus, quo quadratum tertiæ CF superat quadratum quartæ CG; Problema præsens nunc 5. esse reductum ad hoc aliud: *Datis duabus rectis* (CD & CG) *invenire duas medias* (AC & FC) *eâ conditione, ut □ excessûs secundæ suprà tertiam, in excessum primæ suprà quartam,* (nempe ex FA in GD) *æquale sit excessui, quo quadratum tertiæ* (FC) *superat quadratum quartæ,* (CG) *nempe quadrato* FG.

∴ Solvit ergo loco prioris hoc posterius Problema, ponens pro CG, b, pro GD, c ut prima datarum CD sit = $b + c$ & altera GD = b: mediam proportionalem priorem AC vocans x, & hinc posteriorem denominans $\frac{bb + bc}{x}$ (multiplicando scil. quartum per primum, & hoc factum dividendo per secundum) porròq; excessum primæ ($b + c$) suprà quartam (b) invenit esse c, excessum verò secundæ (x) super tertiam $\frac{(bb + bc)}{x}$.$x - \frac{bb + bc}{x}$ h.e. $\frac{xx - bb + bc}{x}$;

ita

ita ut $\square$ horum duorum excessuum sit $\frac{cxx - bbc + bcc}{x}$: Et quia quadratum tertiæ FC est $= \frac{b^4 + 2b^3c + bbcc}{xx}$, subtracto $bb = \square$ GC, datur $\square$ FG $= \frac{b^4 + 2b^3c + bb}{x} - bb$, $= \square$ excessuum modò invento. Ut jam habeatur æquatio:

$$\frac{b^4 + 2b^3c + bbcc - bbxx}{xx} = \frac{cxx - bbc + bcc}{x}$$

&c. &c.

Nos quoque aliam adhuc solutionem tentavimus, æquationem à linea FD (*n.* 1. *Fig. LXI.*) petentes, ut quæ bis haberi potest mediantibus duobus triangulis rectangulis FAD & FGD, cùm utriusque sit hypotenusa. Sed hîc, ultra denominationes superiores nostræ Solutionis, erat imprimis denominanda linea AD, inferendo,

ut CF ad FG sic CD ad AD

$$x - \sqrt{xx - cc} - b + c \text{ s. } a - \frac{a\sqrt{xx - cc}}{x}$$

&c. &c.

Experietur autem, qui vel hanc nostram porrò prosequi, vel illam Renaldini ad finem & effectum deducere conatus fuerit, utrobique multò plus laboris & difficultatis, quàm in prima nostra superiùs data.

SOLI DEO GLORIA.

INDEX
SECTIONUM & CAPITUM,
LIBRI PRIMI

SECTIO I.

CAPUT

CAPUT I.

CAPUT II.

CAPUT III.

CAPUT IV.

CAPUT V.

CAPUT VI.

CAPUT VII.

LIBRI

LIBRI SECUNDI

EXEM-

FINIS.